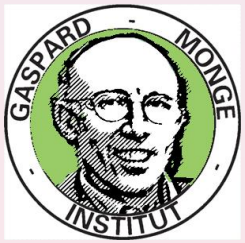
Analyse de la compression par anti-dictionnaire

Julien Fayolle[1]

[1]LRI, Univ. Paris-Sud
julien.fayolle@lri.fr
page ouèbe : www.lri.fr/~fayolle



Journées Séquences
26–28 septembre 2007.

Exemple de compression à l'aide d'anti-dictionnaire

$$T = 011001001$$

Ensemble de tous les mots qui n'apparaissent pas dans le texte T.

Sous-ensemble **minimal** des mots n'apparaissant pas.

Pour la taille 3 :

- 101 car 011001001
- 111 car 011001001 et
- 000 car 011001001.

L'anti-dictionnaire $\mathcal{AD} = \{101, 111, 000, 0011, 010010\}$

$$T = 011001001$$
$$\mathcal{C} = 011$$

Définition

[Crochemore, Mignosi, Restivo et Salemi'99] DCA

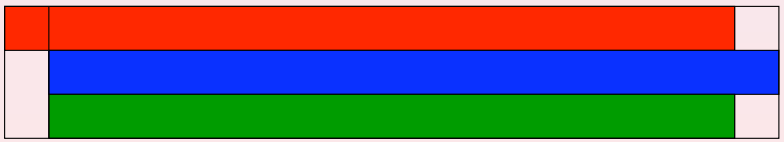
[Ota et Morita'04] (Électrocardiogramme)

Mot minimal interdit

Un MMI pour un texte T est un mot w de taille k qui vérifie

- w n'apparaît pas dans le texte T ;
- le préfixe de w de taille $k-1$ apparaît dans T ;
- le suffixe de w de taille $k-1$ apparaît dans T.

Pour un motif $w = w_1 \cdots w_k$, on note $u = w_2 \cdots w_{k-1}$.



Fonctionnement

- Construction de l'anti-dictionnaire ;
  (`Build-AD`, [Crochemore *et alii*'00] et `ST2AD`, [Morita et Ota'05])
- Compression du texte ;
- Envoi $(\mathcal{AD}, \mathcal{C}, L)$;
- Décompression.

Compression

Compression

$\mathcal{C} := \epsilon$;
pour $i := 0$ à n faire
    si pour tout suffixe v de $T[0 \cdots i]$, $v0 \notin \mathcal{AD}$ et $v1 \notin \mathcal{AD}$
        alors $\mathcal{C} := \mathcal{C}.T[i+1]$;
    fin si
fin pour

$$T = 011001001$$
$$\mathcal{C} = 011$$

Décompression

$T := \epsilon$; $j := 0$
tant que $|T| < n$ faire
    si pour tout suffixe v de T, $v0 \notin \mathcal{AD}$ et $v1 \notin \mathcal{AD}$
        alors $T := T.\mathcal{T}[j++]$;
    sinon
        si $v0 \in \mathcal{AD}$
            $T := T.1$;
        sinon
            $T := T.0$;
        fin si
    fin si
fin tant que

$\mathcal{AD} = \{101, 111, 000, 0011, 010010\}$ $\quad L = 9$

$$C = 011$$
$$\mathcal{T} = 011001001$$

Modèle

Modèle de génération des textes

Les textes sont engendrés par une source

- binaire $\mathcal{A} = \{0, 1\}$;
- sans mémoire ;
- biaisée (p, q).

Définition

La probabilité p_w d'occurrence du motif w est la probabilité que la source émette un mot qui commence par w.

$$w = 0100010101 \text{ et } p_w = pqpppqpqpq = p^6q^4.$$

Objectif

La taille de l'anti-dictionnaire : $\mathcal{S} = \#\{w : w \in \mathrm{MMI}\}$.

$$T = 011001001$$
$$\mathcal{AD} = \{101, 111, 000, 0011, 010010\}$$
$$\mathcal{S}(T) = 5$$

$$\mathbb{E}_n(\mathcal{S}) = \sum_{w \in \mathcal{A}^\star} \mathbb{E}_n\Big([\![w \in \mathrm{MMI}]\!]\Big) = \sum_{w \in \mathcal{A}^\star} \mathbb{P}_n(w \in \mathrm{MMI}). \quad (1)$$

Taille de l'anti-dictionnaire – sans mémoire [F.'06]

$$\mathbb{E}_n(\mathcal{S}) = K\frac{n}{h} + \frac{n}{h}\epsilon(n) + o(n),$$

avec une constante K explicite.

Trichotomie des motifs selon leur longueur

Motifs courts : $k \leq \frac{5}{6} \frac{1}{\log(1/q)} \log n$

$\mathbb{P}_n(N_w = 0) \hookrightarrow o(1)$

Motifs longs : $k \geq \frac{3}{2} \frac{1}{\log(1/p)} \log n$

$\mathbb{P}_n(N_u \geq 2) \hookrightarrow O(n^{0.25})$

Motifs intermédiaires : (longueurs $\mathfrak{I}_n$)

Traitement des motifs intermédiaires

- Modèle simplifié ;
- Calcul sous ce modèle ;
- Retour au modèle « réel ».

Modèle simplifié pour les motifs intermédiaires

P_1 – occurrences de u distantes

$$\mathbb{P}_n(w \in \text{ MMI}) \simeq \mathbb{P}_n(\{w \in \text{MMI}\} \cap \mathfrak{Y}_u)$$

$\mathfrak{Y}_u$ = ensemble des textes avec au moins deux occurrences de u et pour lesquels ces occurrences sont à distance au moins 2.

P_2 – approximation de Poisson

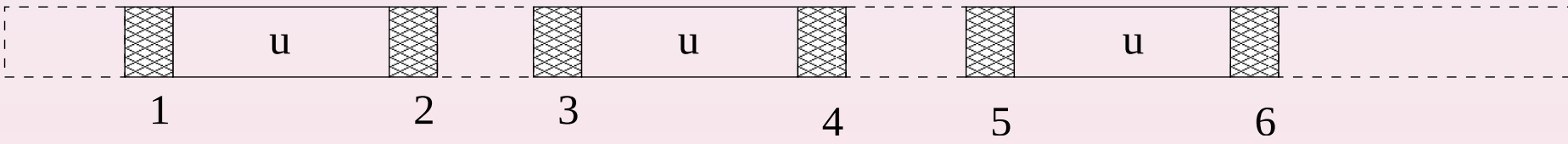
$$\forall j \in \mathbb{N},\ \forall u \in \mathcal{A}^\star, \quad \mathbb{P}_n(\widetilde{N}_u = j) \simeq \frac{(np_u)^j}{j!} \exp(-np_u).$$

$\widetilde{N}_u$ vaut le nombre d'occurrences de u dans les textes où les occurrences de u sont à distance au moins 2 et 0 sinon.

Calcul sous le modèle simplifié (intermédiaires)

$$\sum_{k\in\mathfrak{I}_n}\sum_{w\in\mathcal{A}^k}\mathbb{P}_n(w\in \text{ MMI}) \overset{\text{P}_1}{=} \sum_{k\in\mathfrak{I}_n}\sum_{w\in\mathcal{A}^k}\sum_{j\geq 2}\mathbb{P}_n(w\in \text{ MMI }|\widetilde{N}_u=j)$$

$$\overset{\text{P}_2}{=} \sum_{k\in\mathfrak{I}_n}\sum_{\alpha,\beta\in\mathcal{A}^2}\sum_{u\in\mathcal{A}^{k-2}}\sum_{j\geq 2}\mathbb{P}_n(\alpha u\beta\in \text{ MMI }|\widetilde{N}_u=j)\frac{(np_u)^j}{j!}\exp(-np_u).$$



$$\sum_{j\geq 2}\frac{C_j^{\alpha,\beta}}{j!}z^j = 1.(\exp(zp_\alpha p_{\overline{\beta}})-1)(\exp(zp_{\overline{\alpha}}p_\beta)-1)\exp(zp_{\overline{\alpha}}p_{\overline{\beta}})$$

$$\sum_{k\geq 0}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\left[(\exp(zpqp^iq^{k-i})-1)^2\exp(zq^2p^iq^{k-i})\exp(-zp^iq^{k-i})\right]$$

Transformée de Mellin

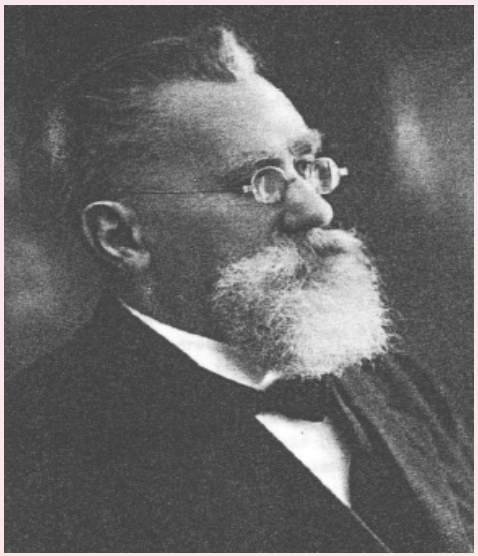
Définition

$$f^\star(s) := \mathcal{M}(f;s) := \int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx.$$

développement asymptotique de f	information complexe sur $f^\star$
terme en x^{-c}	localisation d'un pôle (en c)
facteur en $\log^{k-1} x$	ordre k du pôle
coefficient du terme en x^{-c}	résidu en c

[de Bruijn, Knuth et Rice'72]

[Flajolet, Gourdon et Dumas'95]



Kicéçuilà $\longrightarrow$

Hjalmar Mellin, suomalainen matemaatikko (1854–1933)

Asymptotique de la somme

$$\sum_{k\geq 0}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\left[(\exp(npqp^iq^{k-i})-1)^2\exp(nq^2p^iq^{k-i})\exp(-np^iq^{k-i})\right]$$

$$f(z) := \exp(z(-1+2pq+q^2))-2\exp(z(-1+pq+q^2))+\exp(z(-1+q^2)).$$

Mellin $(0,0),(0,1),(1,0)$ et $(1,1)$

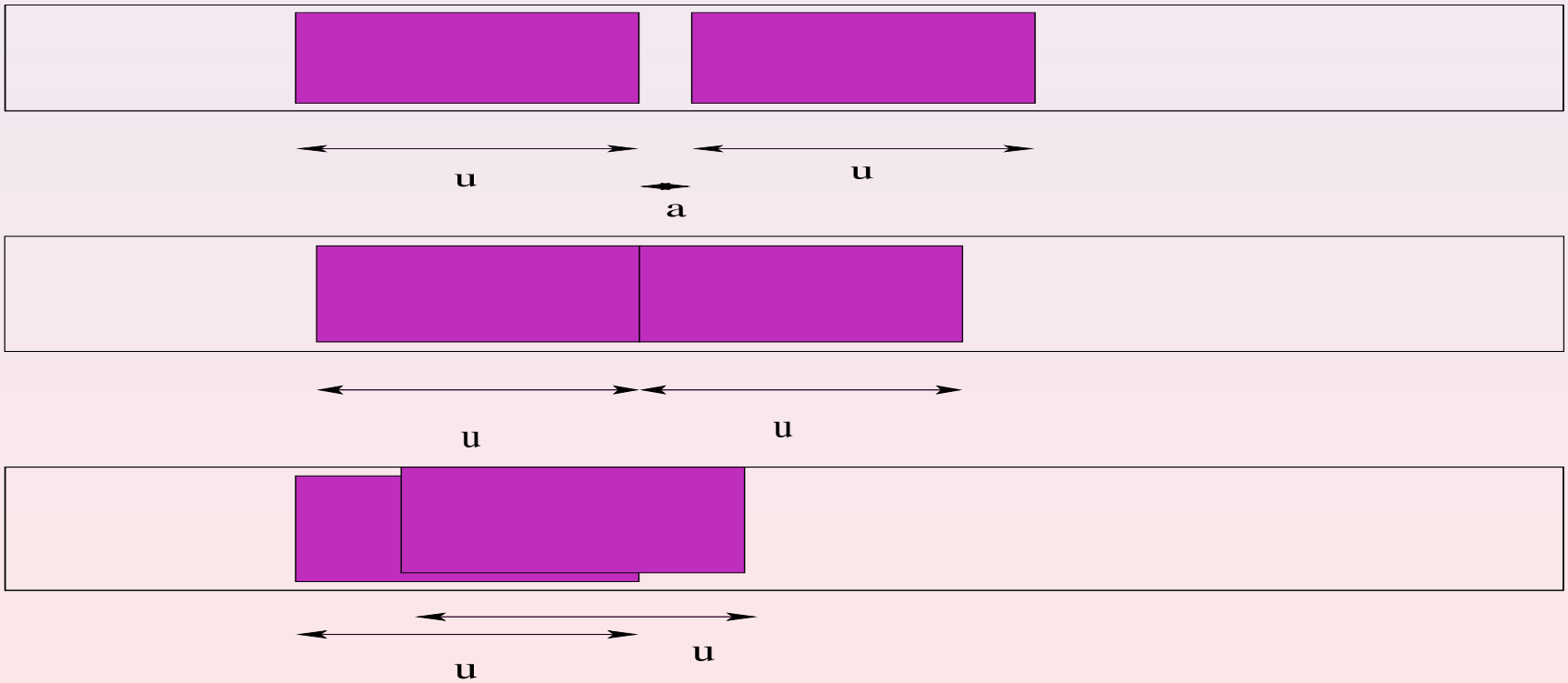
$$\mathcal{E}(n) = \frac{K}{h}n + o(n)$$

$$K = 2h+(1-p^2)\log(1-p^2)+(1-q^2)\log(1-q^2)+2(1-pq)\log(1-pq).$$

Validation du modèle : P_1

Le résultat sous modèle approché et le « vrai » résultat diffèrent d'un terme sous-linéaire.

$$\Delta_1(n) := \sum_{k \in \mathfrak{I}_n} \sum_{w \in \mathcal{A}^k} \mathbb{P}_n(w \in \ \mathrm{MMI}) - \mathbb{P}_n(w \in \ \mathrm{MMI} \cap \mathfrak{Y}_u).$$



$$\Delta_1(n) = O\left(n^{1-\frac{5}{12}\frac{\log p}{\log q}}\right).$$

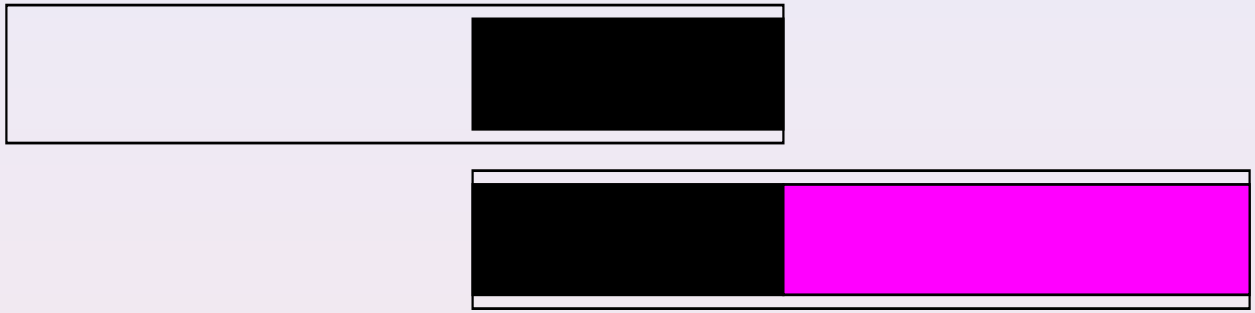
Chevauchement

w	=	01011010 ✔	$i = 0$
		01011010	1
		01011010	2
		01011010	3
		01011010	4
		01011010 ✔	5
		01011010	6
		01011010 ✔	7

Polynôme d'auto-corrélation :

$$\boxed{\mathfrak{C}_w(z) = 1 + z^5 + z^7.}$$

Auto-corrélation



Polynôme d'auto-corrélation probabilisé

Pour un motif w de taille k,

$$c_w(z) := \sum_{i=0}^{k-1} [\![w_1^{k-i} = w_{i+1}^{k}]\!] p_{w_{k-i+1}^{k}} z^i. \tag{2}$$

Sous un modèle sans mémoire (p, q) :

$$\boxed{\sum_{w \in \mathcal{A}^k} c_w(1) = 2^k + k - 1}.$$

Validation du modèle : P_2

On évalue la distance entre $\widetilde{N}_u$ et X_u ($X_u \rightsquigarrow \mathcal{P}(np_u)$).

$$\Delta_2(n) = \sum_{k\in\mathfrak{I}_n} \sum_{w\in\mathcal{A}^k} \sum_{j\geq 2} \mathbb{P}_n(w \in \text{ MMI } | \widetilde{N}_u = j) \left[\mathbb{P}_n(\widetilde{N}_u = j) - \mathbb{P}_n(X_u = j)\right]$$

1. [Barbour, Holst et Janson'92] *via* Stein-Chen :

$$\sum_{j\geq 0} \left|\mathbb{P}_n(N_u = j) - \frac{(np_u)^j}{j!}\exp(-np_u)\right| \leq 4(c_u(1)-1)+2(2|u|-1)p_u$$

N_u est le nombre d'occurrences du motif u

2. $$\mathbb{P}_n(N_u = j) - \mathbb{P}(\widetilde{N}_u = j).$$

Textes avec exactement j occurrences de u et où au moins deux occurrences sont à au plus une lettre d'écart (cf. P_1).

$$\Delta_2(n) = O\left(n^{1-\frac{5}{12}\frac{\log p}{\log q}}\right)$$

Asymptotique de la taille de l'anti-dictionnaire

Théorème [Fayolle'06]

Le comportement asymptotique de la taille moyenne de l'anti-dictionnaire pour un texte de taille n produit par une source **sans mémoire** (p, q) s'écrit

$$\mathbb{E}_n(\mathcal{S}) = K\frac{n}{h} + \frac{n}{h}\epsilon(n) + o(n),$$

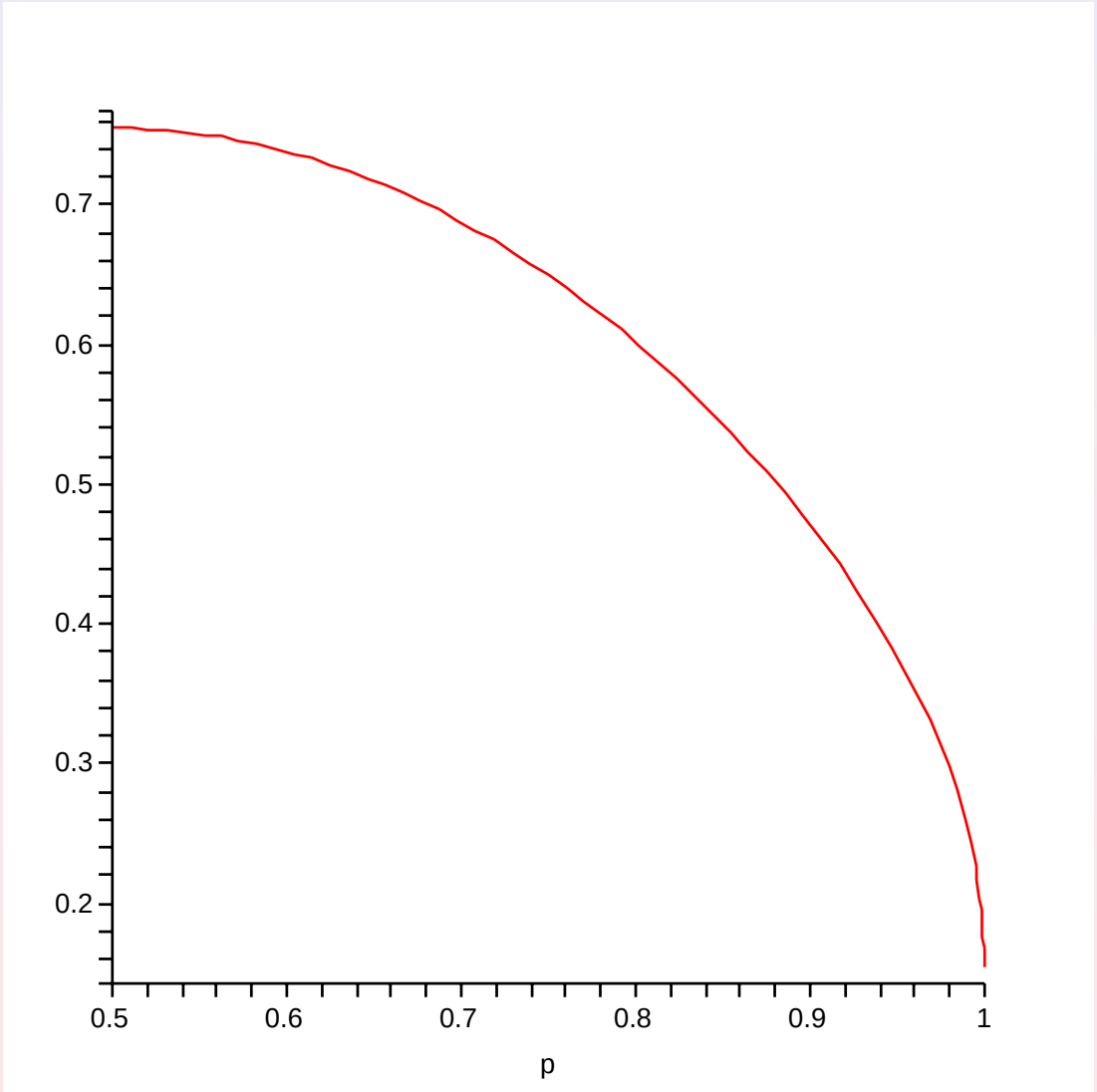
où la constante K vaut

$$2h + (1-p^2)\log(1-p^2) + (1-q^2)\log(1-q^2) + 2(1-pq)\log(1-pq),$$

l'entropie $h = -p\log p - q\log q$ et $\epsilon(n)$ est une fonction oscillant de très faible amplitude autour de zéro.

Autre résultat : [Morita et Ota'04] $\quad \mathcal{S} \leq n+1.$

Comment se comporte K ?



$$3 \log 3 - 4 \log 2$$

Perspectives

- Étendre les résultats du modèle sans mémoire à un modèle markovien, puis de source dynamique [Vallée] ;
- Obtenir l'asymptotique de la variance de la taille et des moments d'ordre supérieurs ;
- Obtenir l'asymptotique des moments de la « longueur de cheminement » ;
- Montrer que la compression par anti-dictionnaire atteint le taux entropique de compression [Crochemore *et alii*] ;
- Est-il possible d'étendre l'algorithme à un alphabet non-binaire ?