Contradicting Beliefs and Communication

J.-M. Tallon, J.-C. Vergnaud, & S. Zamir
CNRS-EUREQua

Introduction

Papier propose :

- Considère structure de Kripke (KD45 au lieu de S5)
- Processus de communication entre les agents
- Règle de révision des croyances en cas d 'erreurs/surprises

Motivation :

- En économie, rôle restreint joué par les différences de croyance du à des hypothèses fortes,
- Relâcher la rationalité en introduisant la possibilité d 'erreurs,

Exemple de graphe

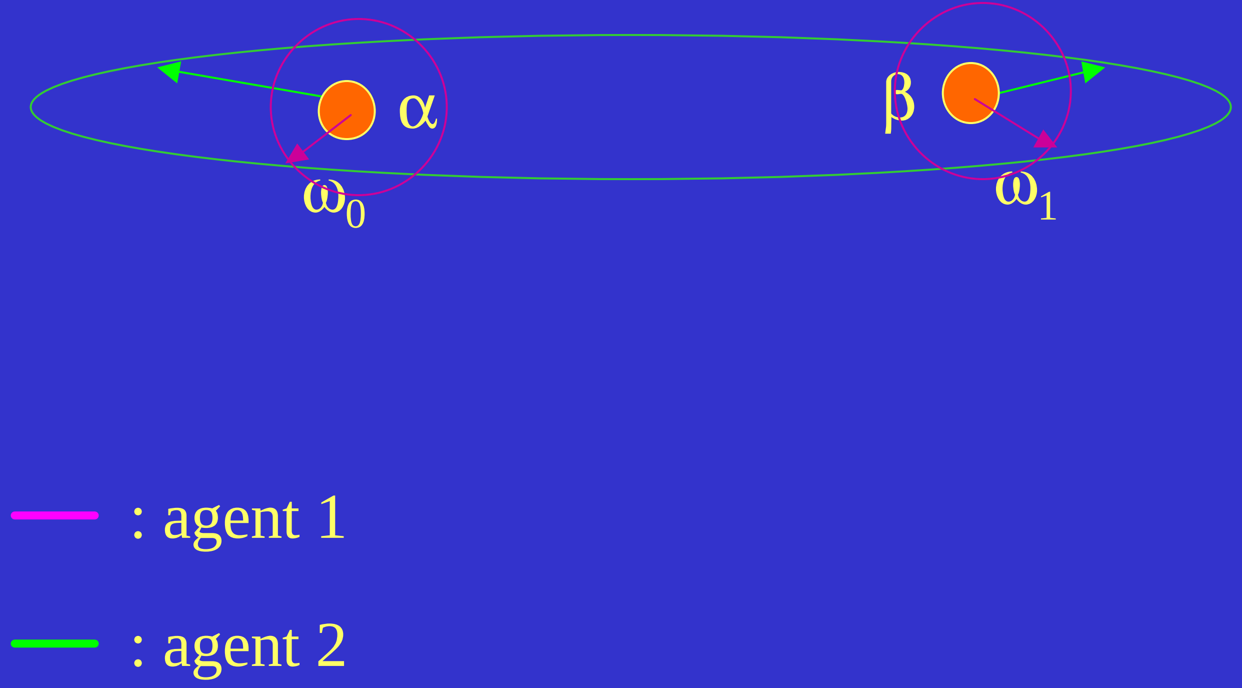
$\omega_0=(\alpha,\{\omega_0\},\{\omega_0,\omega_1\})$
$\omega_1=(\beta,\{\omega_1\},\{\omega_0,\omega_1\})$

1 connaît l'état de la nature
2 ne le connaît pas
1 sait que 2 doute
2 sait que 1 sait

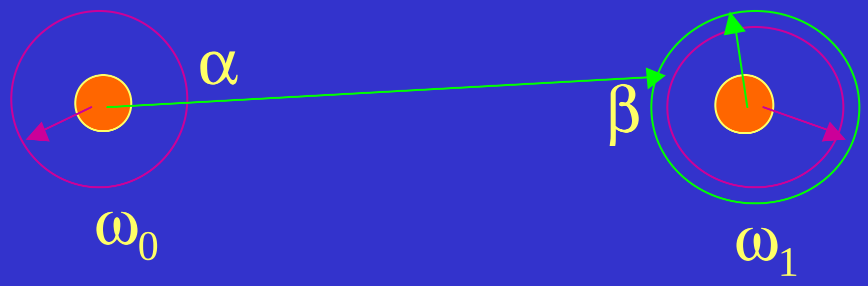
Remarque: pas d'erreur, i.e., ω_0 est considéré comme possible par les deux agents. Dira dans ce cas que le système de croyances mutuelles est « correct ».

De plus, dans l 'état « hypothétique » ω_1 les deux agents croient ω_1 possible => système « totalement correct »

Illustration



Exemple d 'information secrète



: agent 1

: agent 2

Système de croyances mutuelles

Définition: Un système de croyances mutuelles est un 4-uplet $(\Omega,\omega_0,s,(t_i)_{i\in I})$ où Ω est un ensemble satisfaisant:

(i) s est une fonction de Ω dans S

(ii) $\forall\, i \in I$, t_i est une fonction de Ω dans 2^{Ω}

(iii) $\forall\, i \in I$, $\forall \omega \in \Omega$, $\omega' \in t_i(\omega) \Rightarrow t_i(\omega) = t_i(\omega')$

(iv) $\omega_0 \in \Omega$

(v) $\forall \omega \in \Omega$, il existe r et une suite d'agents t.q.
$\omega \in t_{i_1}(t_{i_2}(\ldots .\ t_{i_r}(\omega_0)))$

$(\omega,s(\omega),\ t_1(\omega),\ t_2(\omega),\ t_I(\omega))$ est un **état du monde**

Croyances erronées

Exemple d'un système de croyances erronées:

$\omega_0=(\alpha,\{\omega_0\},\{\omega_1\})$
$\omega_1=(\beta,\{\omega_0\},\{\omega_1\})$

$\Rightarrow$

* le vrai état de la nature est α , ce que pense 1 alors que 2 pense que l'état de la nature est β
* les croyances de 1 et 2 sur l 'état de la nature sont croyances communes.

Exemple d'un système où les agents ont des modèles différents:

$\omega_0=(\alpha,\{\omega_2\},\{\omega_1\})$
$\omega_1=(\alpha,\{\omega_1\},\{\omega_1\})$
$\omega_2=(\beta,\{\omega_2\},\{\omega_2\})$

$\Rightarrow$

* 1 croit qu 'il est croyance commune que l'état est β.
* 2 croit qu 'il est croyance commune que l'état est α.

Communication et Révision

* Point de vue informel en économie: les divergences de croyance
disparaissent si les agents se « parlent »,
* Est-ce le cas ici?
* Comment un agent doit-il réviser ses croyances lorsqu'il découvr
qu'elles étaient erronées?

« Communication »

Communication dans le vrai monde ω_0 : les agents (ou un sous ensemble) se communiquent leurs vraies croyances.
Pas de communication stratégique.
Pas de communication partielle => de facto, communique la hiérarchie infinie des croyances.

Formellement: agent i annonce $c_i = t_i(\omega_0)$

Premier principe : l 'absence d 'influence

Quand un agent entend une annonce, il ne considère que les mondes dan
esquels cette annonce était possible.

$\omega_0=(\alpha,\{\omega_0,\omega_1\},\{\omega_0,\omega_2\})$
$\omega_1=(\alpha,\{\omega_0,\omega_1\},\{\omega_1\})$
$\omega_2=(\beta,\{\omega_2\},\{\omega_0,\omega_2\})$

$c_1=\{\omega_0,\omega_1\}$ & $c_2=\{\omega_0,\omega_2\}$

$\omega_0=(\alpha,\{\omega_0,\omega_1\},\{\omega_0,\omega_2\})$
$\cancel{\omega_1=(\alpha,\{\omega_0,\omega_1\},\{\omega_1\})}$
$\cancel{\omega_2=(\beta,\{\omega_2\},\{\omega_0,\omega_2\})}$

1 élimine ω_1 car non compatible avec $c_2=\{\omega_0,\omega_2\}$
2 élimine ω_2 car non compatible avec $c_1=\{\omega_0,\omega_1\}$

Premier principe : l 'absence d 'influence

Quand un agent entend une annonce, il ne considère que les mondes dans lesquels cette annonce était possible.

$\omega_0=(\alpha,\{\omega_0,\omega_1\},\{\omega_0,\omega_2\})$
$\omega_1=(\alpha,\{\omega_0,\omega_1\},\{\omega_1\})$
$\omega_2=(\beta,\{\omega_2\},\{\omega_0,\omega_2\})$

$\Updownarrow$

$c_1=\{\omega_0,\omega_1\}$ & $c_2=\{\omega_0,\omega_2\}$ $\Leftrightarrow$ 1 élimine ω_1 car non compatible avec $c_2=\{\omega_0,\omega_2\}$
2 élimine ω_2 car non compatible avec $c_1=\{\omega_0,\omega_1\}$

$\Updownarrow$

$\omega_0=(\alpha,\{\omega_0\},\{\omega_0\})$

Règle générale: définition

Pour généraliser la règle en rectifiant les erreurs

<u>Première étape de raffinement</u>: chaque agent retient parmi les mondes qu ’il considérait, ceux qui ont le rang le plus élevé étant donné la communication.

<u>Deuxième étape de rectification</u>: pour chaque état retenu, rectifie les croyances « attribuées » aux autres agents en fonction des annonces et des modifications de la première étape. Correspond à l’idée que la manière de réviser des agents est « connaissance commune ».

Ordre sur les états du monde

Ordre consiste à donner le classement qu ’un agent établit entre les états après avoir entendu une annonce c.

Ordre sur les mondes possibles est très peu contraint. Seule chose imposée: les mondes qui ne sont pas en contradiction avec l’annonce sont gardés.

Exemple

$\omega_0=(\alpha,\{\omega_1,\omega_2\},\{\omega_3\})$
$\omega_1=(\alpha ,\{\omega_1,\omega_2\},\{\omega_1 ,\omega_2\})$
$\omega_2=(\beta,\{\omega_1,\omega_2\},\{\omega_1 ,\omega_2\})$
$\omega_3=(\beta,\{\omega_3\},\{\omega_3\})$

Suppose que les deux agents communiquent leurs croyances

Pose: ω_3É$_1$ ω_1 É$_1$ ω_2 et ω_1 i$_2$ ω_2 É$_2$ ω_3

Première étape:

$\omega_0=(\alpha,\{\omega_1,\cancel{\omega_2}\},\{\omega_3\})$

$\omega_1=(\alpha ,\{\omega_1,\cancel{\omega_2}\},\{\omega_1 ,\omega_2\})$

$\omega_2=(\beta,\{\omega_1,\cancel{\omega_2}\},\{\omega_1 ,\omega_2\})$

$\omega_3=(\beta,\{\omega_3\},\{\omega_3\})$

Deuxième étape:

$\omega_0=(\alpha,\{\omega_1\},\{\omega_3\})$

$\omega_1=(\alpha ,\{\omega_1\},\{\omega_1 ,\omega_2\})$

$\omega_2=(\beta,\{\omega_1\},\{\omega_1 ,\omega_2\})$

$\omega_3=(\beta,\{\omega_3\},\{\omega_3\})$

Exemple

$\omega_0=(\alpha,\{\omega_1,\omega_2\},\{\omega_3\})$
$\omega_1=(\alpha\ ,\{\omega_1,\omega_2\},\{\omega_1\ ,\omega_2\})$
$\omega_2=(\beta,\{\omega_1,\omega_2\},\{\omega_1\ ,\omega_2\})$
$\omega_3=(\beta,\{\omega_3\},\{\omega_3\})$

Suppose que les deux agents communiquent leurs croyances

Pose: ω_3É$_1$ ω_1 É$_1$ ω_2 et ω_1 i$_2$ ω_2 É$_2$ ω_3

Première étape:

$\omega_0=(\alpha,\{\omega_1,\cancel{\omega_2}\},\{\omega_3\})$

$\omega_1=(\alpha\ ,\{\omega_1,\cancel{\omega_2}\},\{\omega_1\ ,\omega_2\})$

$\omega_2=(\beta,\{\omega_1,\cancel{\omega_2}\},\{\omega_1\ ,\omega_2\})$

$\omega_3=(\beta,\{\omega_3\},\{\omega_3\})$

Deuxième étape:

$\omega_0=(\alpha,\{\omega_1\},\{\omega_3\})$

$\omega_1=(\alpha\ ,\{\omega_1\},\{\omega_3\})$

$\omega_2=(\beta,\{\omega_1\},\{\omega_3\})$

$\omega_3=(\beta,\{\omega_1\},\{\omega_3\})$

Exemple

$\omega_0=(\alpha,\{\omega_1,\omega_2\},\{\omega_3\})$
$\omega_1=(\alpha\ ,\{\omega_1,\omega_2\},\{\omega_1\ ,\omega_2\})$
$\omega_2=(\beta,\{\omega_1,\omega_2\},\{\omega_1\ ,\omega_2\})$
$\omega_3=(\beta,\{\omega_3\},\{\omega_3\})$

Suppose que les deux agents communiquent leurs croyances

Pose: $\omega_3 \text{É}_1\ \omega_1\ \text{É}_1\ \omega_2$ et $\omega_1 \text{ i}_2\ \omega_2\ \text{É}_2\ \omega_3$

Première étape:

$\omega_0=(\alpha,\{\omega_1,\cancel{\omega_2}\},\{\omega_3\})$
$\omega_1=(\alpha\ ,\{\omega_1,\cancel{\omega_2}\},\{\omega_1\ ,\omega_2\})$
$\omega_2=(\beta,\{\omega_1,\cancel{\omega_2}\},\{\omega_1\ ,\omega_2\})$
$\omega_3=(\beta,\{\omega_3\},\{\omega_3\})$

Deuxième étape:

$\omega_0=(\alpha,\{\omega_1\},\{\omega_3\})$
$\omega_1=(\alpha\ ,\{\omega_1\},\{\omega_3\})$
$\omega_2=(\beta,\{\omega_1\},\{\omega_3\})$
$\omega_3=(\beta,\{\omega_3\},\{\omega_3\})$

$\omega_0=(\alpha,\{\omega_0\},\{\omega_1\})$
$\omega_1=(\beta\ ,\{\omega_0\},\{\omega_1\})$

Propriétés

- Règle générale peut toujours être appliquée
- La seconde étape est inutile pour un système totalement correct (S5) et consensus si tous les agents parlent
- Ne converge pas nécessairement vers un accord entre les agents en présence d'erreurs:

$$\omega_0=(\alpha,\{\omega_0\},\{\omega_0,\omega_1\})$$
$$\omega_1=(\beta,\{\omega_0\},\{\omega_0,\omega_1\})$$

Aucune révision après l'annonce
par les deux agents: désaccord persiste

- Lorsque les croyances de premier ordre (sur l'état de la nature) sont croyances communes, aucune révision n'est faite.

Ordre des annonces: non commutativité (1)

$\omega_0=(\alpha,\{\omega_1, \omega_2\},\{\omega_0,\omega_1\},\{\omega_0,\omega_2\})$
$\omega_1=(\beta,\{\omega_1, \omega_2\},\{\omega_0,\omega_1\}, \{\omega_1\})$
$\omega_2=(\gamma,\{\omega_1, \omega_2\},\{\omega_2\}, \{\omega_0,\omega_2\})$

Annonce simultanée des trois agents

Annonce de 1&2 puis 3

Annonce de 1&3 puis 2

Pour ω_1 i $_1{}^c$ ω_2 alors:

$\omega_0=(\alpha,\{\omega_1,\omega_2\},\{\omega_0\},\{\omega_0\})$
$\omega_1=(\beta,\{\omega_1,\omega_2\},\{\omega_0\},\{\omega_0\})$
$\omega_2=(\gamma,\{\omega_1,\omega_2\},\{\omega_0\},\{\omega_0\})$

$\omega_0=(\alpha,\{\omega_1\},\{\omega_0\},\{\omega_0\})$
$\omega_1=(\beta,\{\omega_1\},\{\omega_0\},\{\omega_0\})$

$\omega_0=(\alpha,\{\omega_2\},\{\omega_0\},\{\omega_0$
$\omega_2=(\gamma,\{\omega_2\},\{\omega_0\}, \{\omega_0$

On aurait envie de laisser 1 reconsidérer sa révision du premier tour: dans ce cas, commutatif

Non commutativité (2)

Peut également avoir de la non commutativité lorsque le système initial est correct mais pas totalement correct.

$$\omega_0=(\alpha,\{\omega_0,\omega_1\},\{\omega_0\})$$
$$\omega_1=(\beta,\{\omega_0,\omega_1\},\{\omega_2\})$$
$$\omega_2=(\alpha,\{\omega_2\},\{\omega_2\})$$

1& 2 simultanément

$\omega_0=(\alpha,\{\omega_0\},\{\omega_0\})$

1 puis 2

$\omega_0=(\alpha,\{\omega_0,\omega_1\},\{\omega_0\})$
$\omega_1=(\beta,\{\omega_0,\omega_1\},\{\omega_0\})$

ci, 1 croit que quand l'état est β, 2 se trompe sur ses croyances.

Quand 1 annonce lors du premier tour, 1 sait que les croyances de 2 sur ce qu 'il croit sont maintenant correctes. Annonce de 2 ne modifie rien.

Quand les deux annoncent simultanément, l'annonce de 2 suffit à éliminer ω_1

Extensions

- Introduire la possibilité d 'influence sur d 'autres aspects de ses croyances si réfutation d'une partie de celle-ci
- Communication partielle

Résultats

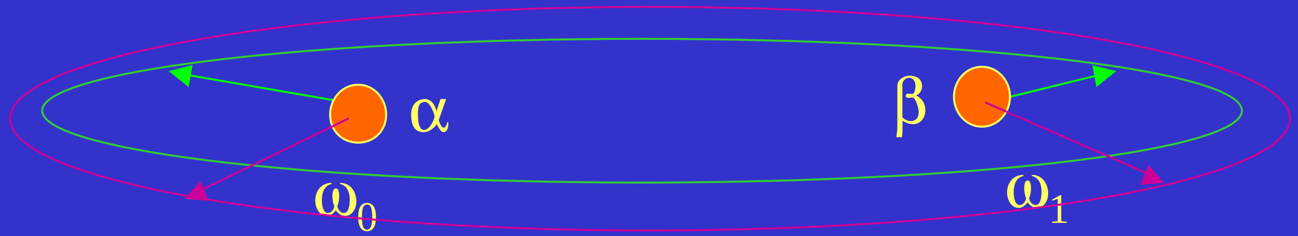
- Pas de raison que les croyances convergent
- Croyances finales dépendent de l 'ordre de communication

Prochaine étape: révélation de l ’information

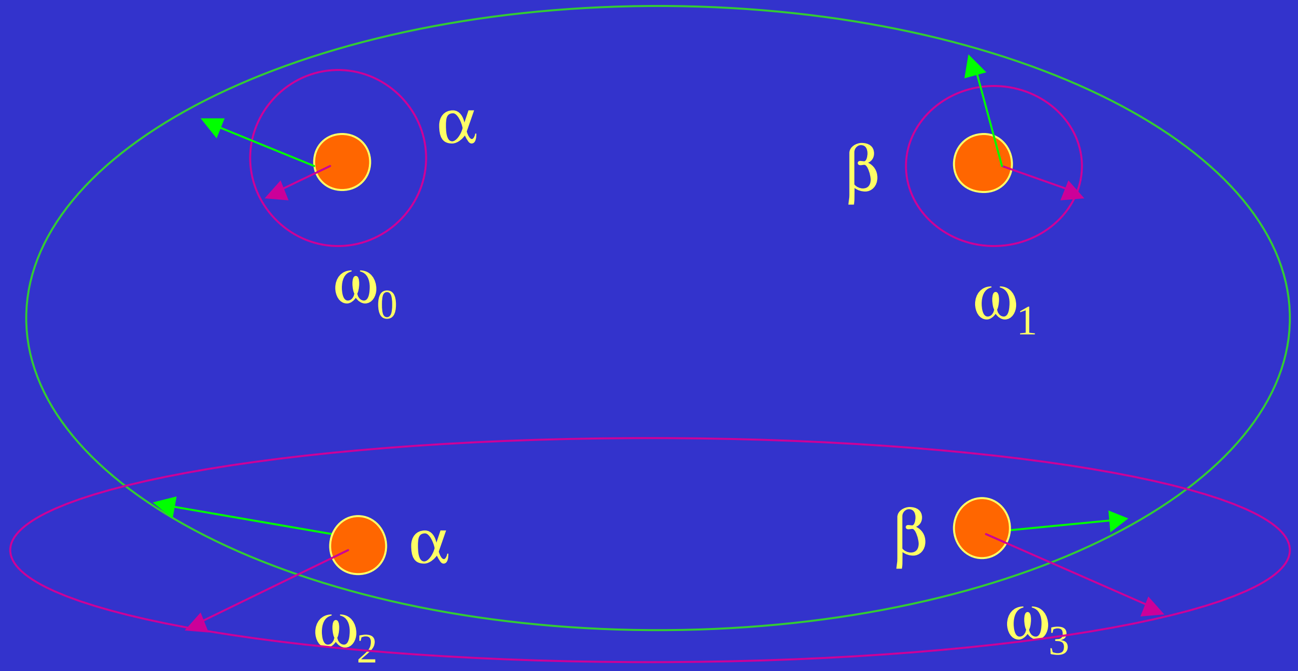
•Résultat classique en économie: on ne garde pas son information privée
de l ’observation des actions, on infère les croyances,
des croyances, on infère l ’information reçue

•Ce n ’est plus vrai si erreurs initiales dans les croyances

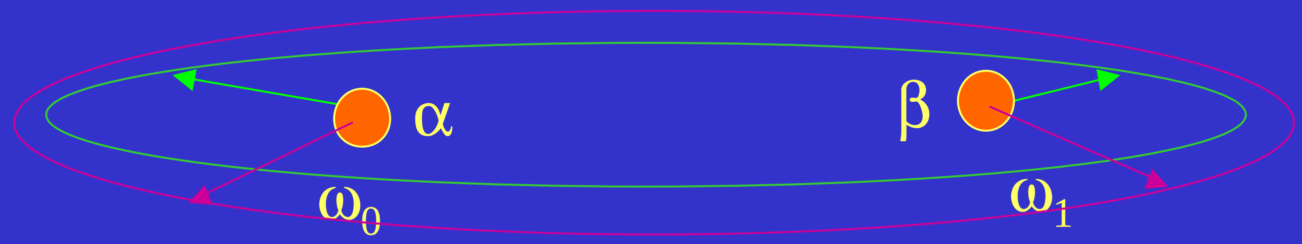
La révélation classique



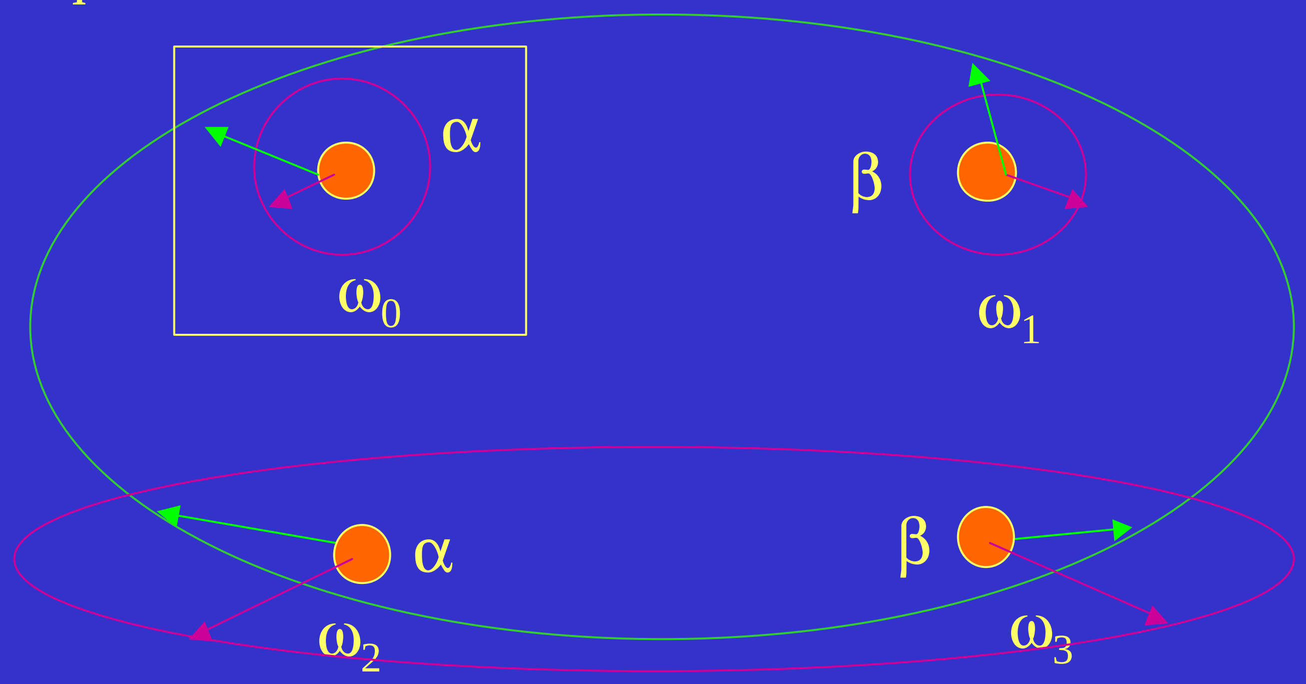
1 apprend α et 2 ne sait pas si le message est α,β ou (α ou β)



La révélation classique

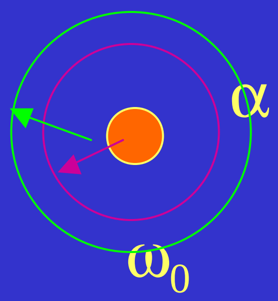


1 annonce qu 'il croît α



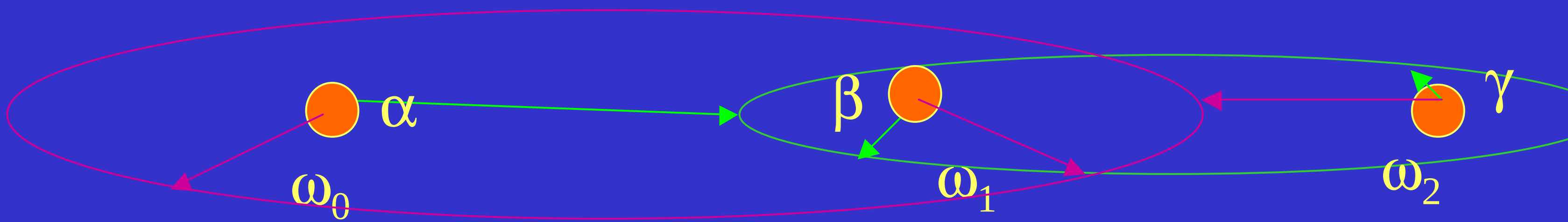
La révélation classique

1 annonce qu 'il croît α

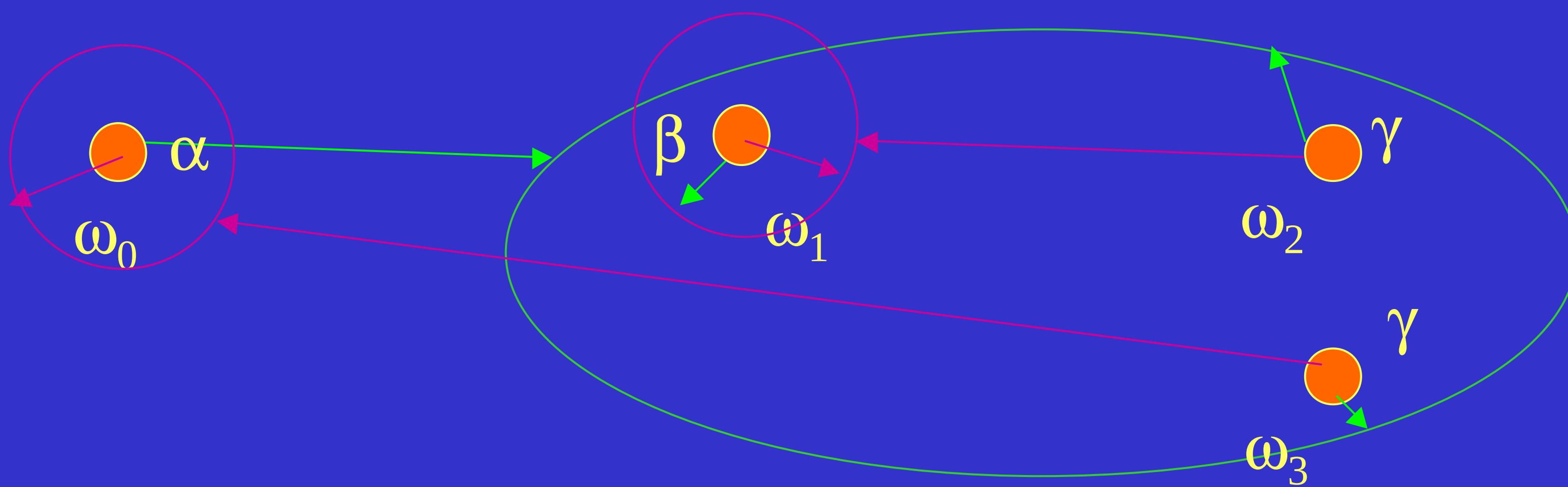


Même chose que si l 'information était annoncée publiquement

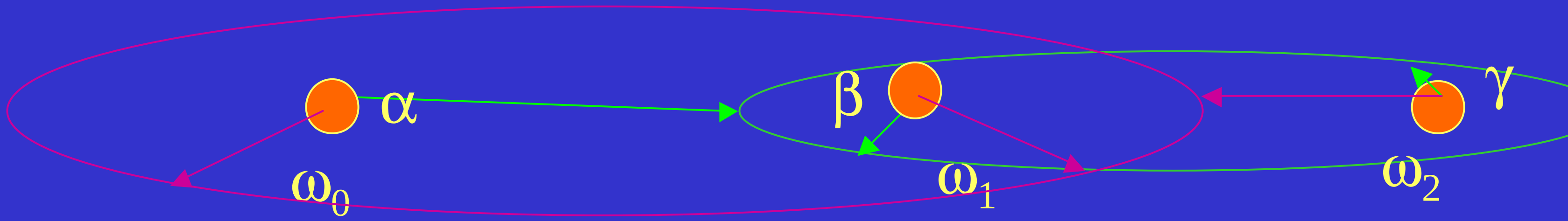
Non révélation



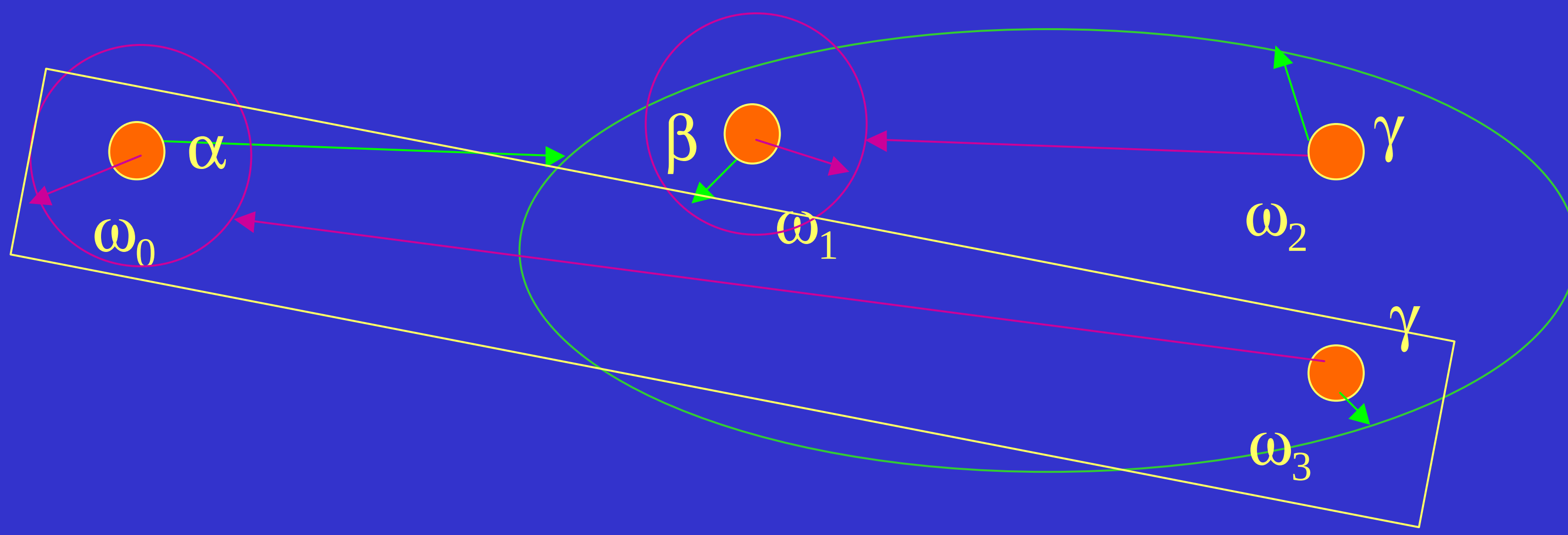
1 apprend α et 2 ne sait pas si le message est α, (α ou γ), (β ou γ), β



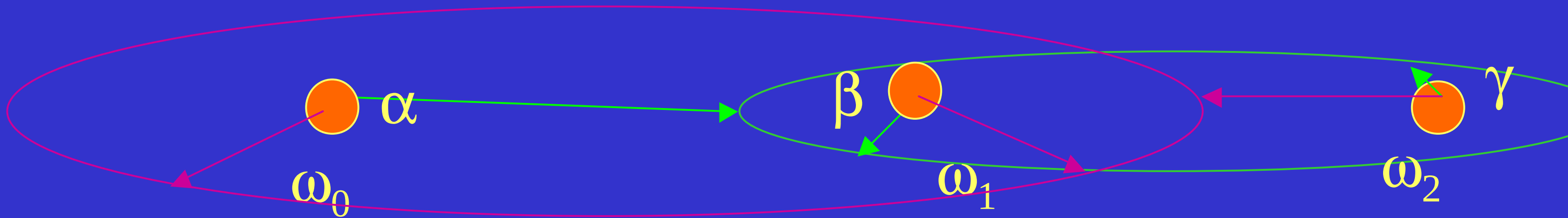
Non révélation



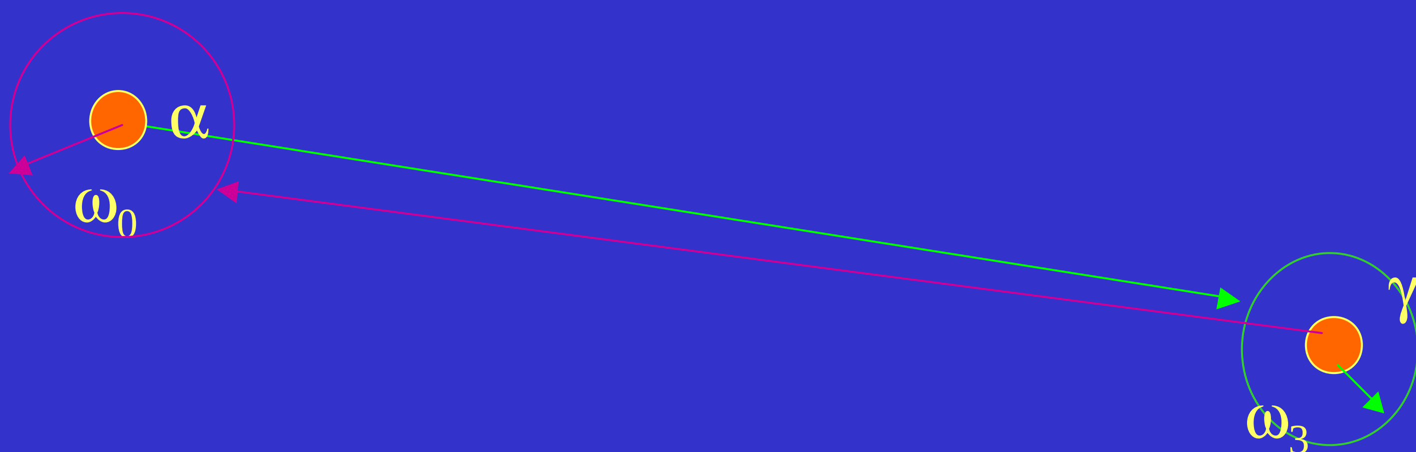
1 annonce qu 'il croît α



Non révélation



1 annonce qu 'il croît α



Différent de si l 'annonce de α avait été publique