

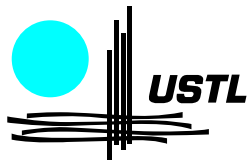


Introduction au traitement de signal numérique

Digital Signal Processing

Pierre Boulet – équipe WEST

Pierre.Boulet@lifl.fr



Plan



- Signaux
- Convolution
- Transformée de Fourier
- Filtres (FIR, IIR)
- Pour aller plus loin



Signaux

Qu'est-ce qu'un signal ?

- définition :
Quantité électrique qui traverse un canal sous la forme d'une tension ou d'un courant, et qui est utilisée pour transmettre des informations.
- note :
Le signal électrique (impulsions), le signal sonore (sons) et le signal lumineux (voyants) sont des types de signaux.
[Office de la langue française, 2000]

Traitement numérique des signaux

- signaux viennent du monde réel
 - interactivité
 - contraintes de temps réel
 - besoin de mesure des signaux
- traitement numérique
 - discrétisation
 - perte d'information entre les échantillons

Domaines d'applications



- multimédia
 - son, image, vidéo
- télécommunications
 - traitement d'antennes
 - compression de données
- sonar, radar
- contrôle de processus

Numérisation

- *discrétisation*
 - du temps (échantillonnage)
 - de l'amplitude (quantification)
- conséquences
 - quantification = ajout d'un *bruit blanc*
 - sauf dans le cas de signaux quasi-constants
 - échantillonnage correct si
 - reconstruction du signal analogique possible
 - *signal ne comprend pas de composantes de fréquence $> 1/2$ fréquence d'échantillonnage* (théorème de Shannon ou Nyquist)
 - cas de l'information dans le *domaine fréquentiel*
 - ou estimation en fonction des objectifs
 - cas de l'information dans le *domaine spatial*

Analyse multi-vitesse

- idée : remplacer des filtres analogiques peu performants dans les convertisseurs A/N par des filtres numériques
- méthode en entrée
 - échantillonner beaucoup plus vite
 - appliquer un filtre passe-bas numérique
 - *décimer* le signal
- méthode en sortie
 - *interpoler* le signal
 - appliquer un filtre passe-bas numérique
 - reconstruire le signal analogique

Systemes linéaires

- propriétés nécessaires
 - homogénéité

$$f(x[n]) = y[n] \Rightarrow f(kx[n]) = ky[n]$$

- additivité

$$f(x_1[n]) = y_1[n], f(x_2[n]) = y_2[n] \Rightarrow f(x_1[n] + x_2[n]) = y_1[n] + y_2[n]$$

- + invariance par translation

$$f(x[n]) = y[n] \Rightarrow f(x[n + s]) = y[n + s]$$

- *si l'entrée d'un système linéaire est une sinusoïde, sa sortie est une sinusoïde de même fréquence*

Superposition

fondation du TS

- décomposition en une *somme pondérée de signaux élémentaires*
- il suffit de connaître l'effet du système sur les signaux élémentaires pour le connaître sur tous les signaux
 - si le système est *linéaire*
- décompositions majeures
 - en *impulsions*
 - de *Fourier* (somme de sinusoides)
- décompositions mineures
 - en marches
 - pair/impair
 - entrelacée



Convolution

Fonction δ et réponse en impulsion

- fonction δ
 - impulsion élémentaire
 - $\delta[0] = 1, x \neq 0 \Rightarrow \delta[x] = 0$
- réponse en impulsion
 - effet du système sur le signal $\delta[n]$
 - notée $h[n]$
- pour une impulsion quelconque
 - $i[n] = a\delta[n - s]$
 - réponse : $ah[n - s]$

Convolution

- décomposition du signal en impulsions
- *en connaissant la réponse en impulsion, on connaît tout*
- notation

$$x[n] * h[n] = y[n]$$

- calcul

$$y[i] = \sum_j h[j] \times x[i - j]$$

Deux vues



- *réponse en impulsion*
 - chaque point du signal d'entrée fournit une contribution au signal de sortie
 - chaque point du signal de sortie reçoit une contribution de plusieurs points du signal d'entrée multipliés par la réponse en impulsion *inversée*
- *somme pondérée des entrées*
 - chaque point du signal de sortie est une somme pondérée de points du signal d'entrée

Propriétés



- propriétés mathématiques de la convolution
 - commutativité
 - associativité
 - distributivité par rapport à la somme
- exemples
 - voir ch. 7 du Scientist and Engineer's Guide to DSP

Corrélation

- mesure la *ressemblance entre deux signaux*
 - utilisée dans les systèmes de détection (radar, sonar, ...)
- formulation mathématique
 - signal c est la corrélation entre signaux a et b

$$c[n] = a[n] * b[-n]$$

- calcul

$$c[i] = \sum_j a[j] \times b[i + j]$$

Implémentation

- calcul coûteux
 - convolution d'un signal de N échantillons avec une réponse impulsionnelle de M échantillons
 - $N \times M$ *multiplications-accumulations*
- trois approches
 - travailler sur des *signaux courts* et utiliser les *entiers* plutôt que les flottants
 - utiliser des processeurs optimisés pour les mul-acc
 - utiliser l'algo de *FFT-convolution*



Transformée de Fourier



Pourquoi les nombres complexes ?

- analyse de circuits électriques (RLC)

- en réels :

$$v = Ri, v = L \frac{di}{dt}, i = C \frac{dv}{dt}$$

- en complexes (transformation phaseur) :

$$V = Z \times I$$

- résistance : $Z = R$
- inductance : $Z = j\omega L$
- capacité : $Z = -j/\omega C$
- remplacement d'équations *différentielles* par des équations *algébriques*

Représentation complexe d'une sinusoïde

- relation d'Euler

$$e^{jx} = \cos(x) + j \sin(x)$$

- d'où

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}e^{j(-\omega)t} + \frac{1}{2}e^{j\omega t}$$

$$\sin(\omega t) = \frac{1}{2}je^{j(-\omega)t} - \frac{1}{2}je^{j\omega t}$$

- présence des *fréquences négatives* dans le *spectre*

Transformée de Fourier Discrète

définition

- décomposition d'un signal en somme de sinusoides
 - signal *discrétisé*
 - à support fini (N échantillons)
 - d'où *spectre périodique*
 - utilisation des exponentielles complexes
- formule (*équation de synthèse*)

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{-j \frac{2\pi kn}{N}}$$

- $x[n]$ et $X[k]$ *complexes*

- rien n'oblige $x[n]$ à contenir autre chose que des réels

Transformée de Fourier Discrète

calcul

- formule (*équation d'analyse*)

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi kn}{N}}$$

- *corrélation* avec chaque exponentielle de base
- marche parce que les exponentielles sont orthogonales
- équivalence entre $X[k]$ et $x[n]$
 - oui grâce au *théorème de Nyquist*
 - contiennent exactement la même information
- transformée de Fourier inverse
 - utiliser l'équation de synthèse

Autres transformées de Fourier

- domaine temporel peut être
 - *continu* ou *discret*
 - *périodique* ou *apériodique*
- 4 transformées de Fourier
 - signal discret dans un domaine \Rightarrow périodique dans l'autre
 - signal continu dans un domaine \Rightarrow apériodique dans l'autre
- réels vs. complexes
 - une version réelle et une version complexe de chaque transformée
 - complexes = langue des spécialistes du TS

Implémentation

- par *corrélation*
 - une corrélation par fréquence (équation d'analyse)
 - complexité : $O(N^2)$
- par *FFT*
 - algorithme rapide en $O(N \log(N))$
 - diviser pour régner



Filtres (FIR, IIR)



Filtres classiques

- utilisations les plus courantes
 - *séparation de signaux combinés*
 - *restauration de signaux distordus*
- paramètres à surveiller
 - signaux dans le domaine temporel
 - vitesse de réaction
 - débordement
 - linéarité de phase (symétrie)
 - signaux à domaine fréquentiel
 - rapidité de transition
 - absence d'ondulations dans la bande passante
 - degré d'atténuation de la bande interdite

Généralités

- chaque filtre linéaire a
 - une *réponse en impulsion*
 - une *réponse à un seuil*
 - une *réponse en fréquence*
- les trois sont équivalentes et contiennent toute l'information du filtre
- techniques d'implémentation
 - convolution avec la réponse en impulsion (FIR)
 - récursion (IIR)
 - somme pondérée du signal d'entrée
 - *et de valeurs précédemment calculées*

FIR

Finite Impulse Response

- convolution avec la réponse en impulsion

$$y[n] = a_0x[n] + a_1x[n - 1] + a_2x[n - 2] + \dots$$

- implémentation

- une simple boucle
- pas de *feedback* (délai)
- bonnes propriétés arithmétiques \Rightarrow on peut utiliser des entiers de précision limitée
- *Array-OL avec motif glissant sur le signal d'entrée*

- propriétés

- compatible avec l'analyse multi-vitesse
- certaines réponses sont difficiles à obtenir

IIR

Infinite Impulse Response

- utilisation de valeurs calculées précédemment

$$y[n] = a_0x[n] + a_1x[n - 1] + a_2x[n - 2] + \dots \\ + b_1y[n - 1] + b_2y[n - 2] + b_3y[n - 3] + \dots$$

- implémentation

- utilisation de *retards*
- instabilité numérique (surtout avec profondeur de récursion > 10)
- *non Array-OL mais récursif*

- intérêt

- *court-circuiter des convolutions longues*
- avec des filtres de réponse infinie (oscillations amorties)

Comparaison

- analogique vs. numérique
 - filtres numériques ont de *bien meilleures propriétés*
 - filtres analogiques *bien plus rapides*
 - filtres analogiques ont une meilleure
 - *gamme dynamique d'amplitude*
 - *gamme dynamique de fréquences*
- FIR vs. IIR
 - performances maximales bien meilleures pour le FIR
 - IIR plus rapide (un ordre de grandeur d'écart)
 - en particulier pour les filtres en domaine fréquentiel



Pour aller plus loin



Sujets avancés



- transformée en z
- conception de filtres
- filtres CIC
- ondelettes
- ...

application de radio numérique de THALES

Références

- *The Scientist and Engineer's Guide to DSP* :
<http://www.dspguide.com/>
- *dspGuru* : <http://www.dspguru.com/>
- *Signal Processing Information Base* :
<http://spib.rice.edu/spib.html>