



Ecole Doctorale Sciences pour l'Ingénieur

Modélisation et simulation du comportement dynamique d'un fil en flexion

Mémoire

soutenu le 26 juin 2001

pour l'obtention du

Diplôme d'études approfondies de
l'Université des Sciences et Technologies de Lille I
(Spécialité Instrumentation et Analyses Avancées)

par

Géry CASIEZ

Laboratoire GEMTEX - Génie et Matériaux Textiles



Remerciements

Ce mémoire est le résultat d'un travail de recherche réalisé au Laboratoire GEMTEX (Genie et Matériaux TEXTiles) à l'ENSAIT (Ecole Nationale Supérieure des Arts et Industries Textiles) au sein de l'équipe "Modélisation des Structures Textiles" sous la direction conjointe du **Professeur Jean-Marie CASTELAIN** (Directeur de l'ENSAIT) et du **Docteur Pascal BRUNIAUX** (Maitre de Conférences à l'ENSAIT).

Je tiens à remercier le **Professeur Jean-Marie CASTELAIN** qui a accepté de diriger cette recherche et qui nous a permis d'effectuer ce mémoire au sein de l'école dans les meilleures conditions.

Ce travail n'existerait pas sans le suivi du **Docteur Pascal BRUNIAUX**.

Je tiens également à remercier **Monsieur Cyril NGO NGOC** (doctorant) qui m'a particulièrement aidé dans mes travaux de recherche.

Table des matières

Chapitre 1

Etat de l'art

1.1	Les modèles existants	1
1.1.1	Les modèles géométriques	1
1.1.2	Les modèles énergétiques	2
1.1.3	Les modèles “physiques”	3
1.2	Bibliographie sur la flexion du fil	5
1.3	Conclusion	6

Chapitre 2

Le modèle

2.1	Le modèle actuel et les travaux antérieurs	7
2.2	Les méthodes existantes à notre disposition	9
2.3	Application de la formulation lagrangienne au modèle	12
2.3.1	Écriture du lagrangien	13
2.3.2	Obtention du système d'équations différentielles	14
2.3.3	Commande du système par ajout de contraintes	14

Chapitre 3

Développement et résultats

3.1	Modélisation sous forme de blocs avec Simulink	16
3.2	Écriture formelle du système d'équations différentielles avec Maple	17
3.3	Résolution numérique du système avec Scilab et dassl	18
3.4	Résultats	19
3.4.1	Tombé d'un fil avec une contrainte	19
3.4.2	Courbe “de la chaînette horizontale”	22

3.4.3	Courbe “de la chaînette verticale”	22
3.5	Identification	23
3.5.1	Mode opératoire	24
3.5.2	Résultats	24
3.5.3	Conclusion	26
	Conclusion	27
	Annexe	28
	Bibliographie	30

Introduction

Depuis quelques années l'équipe "Modélisation des Structures Textiles" du GEMTEX travaille sur la modélisation des tissus. Le modèle existant comporte deux niveaux de modélisation : un modèle de fil pour représenter les fils composant le tissu et un modèle de tissu pour simuler le tissu. Cette approche rend ainsi compte de deux états différents : la linéarité du fil et l'aspect structurel du tissu. Les méthodes de résolution, utilisant le principe fondamental de la dynamique, employées jusqu'alors pour le modèle du fil donnaient des résultats encourageants mais difficiles à mettre en oeuvre. L'objet de cette étude est d'approfondir la modélisation par l'emploi d'autres méthodes : une première approche théorique reposant sur la mise en équation de Lagrange avait été introduite en 1997 et devait être approfondie dans le but de modéliser un fil en flexion.

L'étude envisagée cette année vise à disposer d'une méthode de résolution plus simple et plus rapide afin d'identifier le coefficient de flexion. Nous présenterons dans une première partie l'état des connaissances et des recherches sur le fil et le tissu. La seconde partie exposera le modèle du fil développé par l'équipe et détaillera les différentes méthodes existantes pour en faire la mise en équation. Enfin dans une troisième partie, nous expliquerons la mise en équation formelle de façon automatisée et la résolution numérique du système d'équations qui doit impérativement en respecter les non linéarités. Enfin, nous présenterons les résultats obtenus avec différents types de courbes et les expériences d'identification du coefficient de flexion, ceci afin de valider notre approche.

1

Etat de l'art

1.1 Les modèles existants

1.1.1 Les modèles géométriques

Modèle de Peirce

Il s'agit du modèle le plus connu et, bien qu'incomplet, il sert de modèle de référence dans la modélisation des propriétés mécaniques des tissus en fonction de la contexture d'un tissu [1]. Le modèle est défini à partir d'un tissu armure toile, composé de fils de sections circulaires.

Le modèle proposé par Peirce considère la section du fil comme droite et circulaire et utilise la géométrie relative à cette hypothèse (ellipse). Cette approximation est vraisemblable pour un tissu peu serré, mais pas pour les structures serrées. C'est pourquoi d'autres auteurs ont modifié les hypothèses concernant la section du fil tel Kemp qui propose une forme "champ de course" [2].

Modèle de Kawabata

Kawabata et al. proposent un modèle pour la traction biaxiale [3] de tissu avec une structure identique à celle de Peirce. Cependant, les fils de chaîne et de trame ont été représentés par des lignes droites qui fléchissent en deux Points P_1 et P_2 sur l'axe perpendiculaire au plan du tissu.

Modèle de Grosberg

Les modèles exposés jusqu'à présent ne traitent que de la traction des tissus. En ce qui concerne la flexion, les travaux menés par Grosberg [4, 5] sont à considérer. En effet cet auteur propose un comportement en flexion des structures textiles en s'appuyant sur un système multicouche.

En fait Grosberg considère que la flexion intègre deux composantes :

- une composante linéaire (résistance élastique)
- une composante non linéaire (hystérésis)

En formulant l'hypothèse que pour un fil la pression entre les fibres dans une zone empêche celles-ci de glisser les unes par rapport aux autres, et dans l'autre zone cette pression étant faible, il y a glissement des fibres et donc apparition d'un phénomène d'hystérésis .

Modèle de Abbott

G.M. Abbott [6] propose une autre vision du modèle géométrique de Peirce qu'il modifie en mettant en évidence la relation entre les paramètres géométriques du modèle de Peirce et les paramètres de la composante linéaire du modèle de Grosberg. Dans un premier temps, il a développé son analyse pour une structure non relaxée : les fils extraits d'une telle structure deviennent rectilignes. Ensuite, il poursuit son étude avec des tissus en état de relaxation, cette fois les fils gardent leur déformation ondulée quand on les enlève. Ainsi celui-ci propose que la relaxation du fil soit considérée comme une perte de l'énergie élastique accumulée dans le tissu.

A partir des propriétés du fil et des propriétés géométriques du tissu, Grosberg approfondit son étude au cisaillement des structures textiles. B. Olofson a repris les travaux précédents et développé un nouveau modèle de cisaillement [7]. Un autre auteur J. Skelton s'est intéressé en particulier au cisaillement des tissus [8].

1.1.2 Les modèles énergétiques

Les méthodes énergétiques sont largement utilisées dans le domaine des problèmes mécaniques. Au lieu d'établir des relations géométriques et des calculs de forces relative-

ment lourds à mettre en oeuvre, le principe du minimum d'énergie permet d'obtenir une autre formulation. Toutefois ces méthodes ne peuvent s'appliquer que sur des structures élastiques conservatives.

Le principe est simple : une structure déformée tend vers un état d'énergie minimale dans lequel les forces et les couples sont en équilibre. Ainsi, dans un tissu, les fils vont s'organiser afin que l'énergie du système soit minimale en tenant compte des diverses contraintes s'exerçant.

R. Postle et S. de Jong ont appliqué ces méthodes à l'étude des déformations textiles [9] et ont décomposé l'énergie en quatre termes :

- énergie de flexion par unité de longueur(E_b)
- énergie de torsion par unité de longueur(E_r)
- énergie de compression latérale par unité de longueur(E_c)
- énergie d'extension longitudinale par unité de longueur(E_t)

L'énergie totale s'exprime donc de la manière suivante :

$$E = \sum_{i=1}^{i=n} \int_0^{l_i} (E_b + E_r + E_c + E_t) dl \quad (1.1)$$

1.1.3 Les modèles “physiques”

Modèle à particules de Breen

Les modèles présentés précédemment permettent de caractériser les propriétés mécaniques des tissus. Cependant, ils utilisent peu les moyens de mesure et nécessitent d'utiliser des valeurs empiriques pour les paramètres de modélisation. C'est pourquoi la démarche la plus proche du monde réel est de faire appel à des modèles “physiques” afin d'employer des paramètres issus de ce monde réel.

D. Breen, D. H. House et P. H. Getto ont élaboré un modèle de type “système à particules”. S'appuyant sur le fait qu'une structure textile est discontinue, ils considèrent qu'il faut au moins descendre à l'échelle du fil pour modéliser les surfaces tissées.

Leur modèle est donc constitué d'un réseau régulier de particules correspondant au point d'intersection d'un fil de trame avec un fil de chaîne. Une méthode énergétique

est utilisée pour décrire le comportement des particules. Dans ce système l'énergie est décomposée de la manière suivante :

- l'énergie d'attraction/répulsion entre deux particules (traction/compression)
- l'énergie de résistance au cisaillement
- l'énergie de résistance à la flexion
- l'énergie due à la gravité

Remarque : Les auteurs ne s'intéressant qu'au drapé, seule la force de gravité est introduite dans le système d'équations en tant que force extérieure.

Le calcul de la solution s'effectue par la recherche du minimum énergétique.

Ce modèle se distingue des modèles énergétiques classiques par l'utilisation des données du système d'évaluation Kawabata (KES). Ainsi les mesures issues de la chaîne KES sont utilisées et approximées pour déterminer les énergies citées plus haut [10].

Cependant, l'utilisation des mesures du système Kawabata suppose la mesure a posteriori, c'est-à-dire la réalisation d'échantillons. Or l'objectif à long terme de l'équipe est d'obtenir les propriétés mécaniques des tissus avant conception et en particulier les mesures KES.

Modèle micro-mécanique de Realf

M. L. Realf propose un modèle de traction uni-axiale de tissu s'appuyant sur les modèles géométriques avec comme paramètres d'entrée des propriétés des fils constituant le tissu issues de mesures physiques, ainsi que la géométrie du textile [11].

L'étude menée sur la traction uni-axiale se déroule en deux phases :

1. Détermination des forces suivant l'axe principal de la déformation
2. Détermination des forces transverses

Cette démarche amène à considérer trois étapes lors de la traction :

1. faible résistance due à un changement de réduction du tissu
2. résistance plus forte du tissu
3. rupture du tissu

Il se peut que le tissu ait des perturbations, celles-ci sont prises en compte dans le modèle en considérant les travaux de Peirce [1].

Pour chacune de ces étapes, Realf a caractérisé les forces mises en jeu.

- sous une faible sollicitation, la résistance suivant l’axe principal est due à un changement de la réduction du tissu. Suivant l’axe normal elle est due à la résistance en flexion des fils et à leur écrasement.
- sous une sollicitation moyenne ou forte, la résistance suivant l’axe principal est due aux propriétés d’extension des fils. Suivant l’axe normal elle est due à la consolidation des fils et à leur écrasement.

La rupture se produit lorsqu’un fil a atteint sa distance maximale d’extension. Attention, il se peut, si le tissu a une forte réduction, que la rupture au niveau d’un fil soit due à la rupture des fibres au lieu d’un glissement des fibres. [12].

Ainsi Realf et al. ont déduit les paramètres d’entrée pour leur modèle :

- géométrie du tissu
- comportement en flexion du fil
- comportement de consolidation du fil
- comportement d’écrasement du fil
- comportement en traction du fil

Chacun des paramètres de comportement du fil est mesuré à l’aide d’un système existant ou mis au point par Realf et son équipe.

Le modèle est développé suivant la compressibilité du fil et en considérant que ce dernier est de section droite à l’origine puis de section elliptique une fois tissé.

1.2 Bibliographie sur la flexion du fil

La bibliographie sur la flexion se rapporte surtout au tissu et à la fibre. On trouve en effet très peu de publications relatives au fil. Nous nous sommes intéressés aux méthodes de mesure du coefficient de flexion appelé rigidité en flexion (B) ou rigidité en longueur (c). La rigidité en longueur correspond, pour le tissu, à la longueur pour laquelle l’extrémité fléchit d’une certaine distance sous son propre poids. La rigidité en flexion correspond à la valeur de la pente de la courbe représentant le moment de flexion en fonction de la

courbure [9]. Une relation lie la rigidité en longueur et la rigidité en flexion :

$$\frac{w}{B} = \frac{1}{c^3}$$

w étant la masse surfacique du tissu. Pour ces paramètres, Naiyue Zhou et Tushar K. Ghosh nous montrent quelles sont les différentes formes de courbes les plus sensibles au paramètre de flexion pour le tissu [13, 14, 15]. Ces types de courbes seront étudiés dans le cas du fil afin d'identifier avec précision le paramètre de flexion.

1.3 Conclusion

Les modèles de tissus actuels ne sont pas encore assez proches de la réalité physique et se limitent souvent à des quantifications et normalisations de valeurs difficilement exploitables physiquement. Les modèles d'infographie, par exemple, poursuivent le but d'un rendu réaliste et se soucient peu de la réalité physique. C'est pourquoi il est important pour nous de développer notre propre modèle proche des réalités physiques textiles. Dans ce cadre, le besoin de modéliser les comportements du fil est légitime, car associé au modèle de tissu (structurel et plus proche d'une surface) il renforce les caractéristiques physiques du modèle et permettra peut-être de modéliser certains phénomènes encore trop complexes à modéliser. C'est aussi grâce à une modélisation plus fine du fil et tenant compte des phénomènes non-linéaires du fil qu'il serait plus aisé de modéliser les non-linéarités du tissu. Ainsi le modèle doit tenir compte de la non-linéarité du fil et la résolution ne pas la faire disparaître.

2

Le modèle

2.1 Le modèle actuel et les travaux antérieurs

Dans le modèle masse-ressort développé depuis quelques années au sein du laboratoire [16], le fil est représenté par un ensemble de n barres sans masse reliées entre elles par des noeuds de masse m . Ce système sera noté Σ dans la suite de ce document et on notera R_g le référentiel galiléen. Le modèle ainsi obtenu est un modèle discret contrairement au fil. Le fil est considéré comme uniforme : les n masses ainsi que les n barres sont identiques.

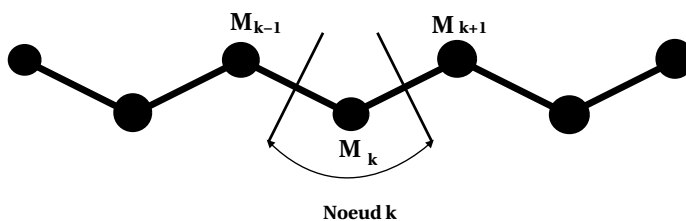


FIG. 2.1 – Modèle de base

Chaque barre est modélisée par un système de Kelvin Voigt [17] : un ressort de raideur K_r travaille en parallèle avec un amortisseur visqueux de coefficient K_v .

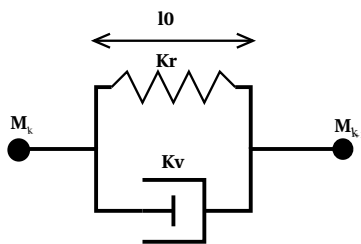


FIG. 2.2 – Modèle de la barre

Le comportement en flexion du fil à l'équilibre induit, pour tout angle θ au noeud M_k une force de réaction $\vec{F}_{flexion}$ portée par le vecteur unitaire $\vec{u}_k = \frac{\vec{M}_k M_{k+1} + \vec{M}_k M_{k-1}}{\|\vec{M}_k M_{k+1} + \vec{M}_k M_{k-1}\|}$ telle que $\vec{F}_{flexion} = C_f \cdot \theta \cdot \vec{u}_k$. Cette force correspond à la force résultante des couples équivalents à un ressort spirale au noeud M_k .

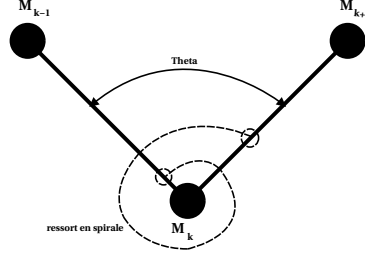


FIG. 2.3 – Représentation de la flexion

On obtient ainsi ce modèle de fil :

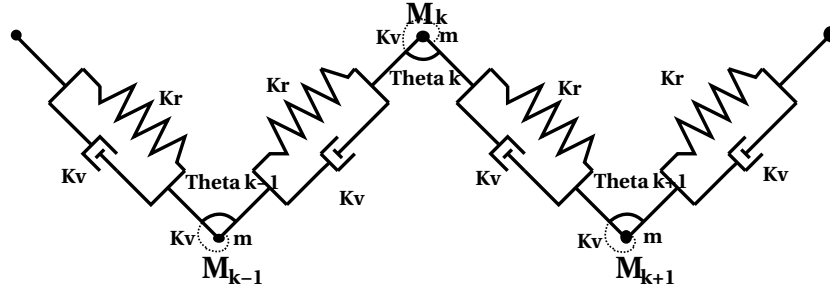


FIG. 2.4 – Modèle complet

Les forces appliquées sur chaque segment élémentaire (noeud $k +$ barre k) sont :

1. Forces dérivant d'un potentiel :

- le poids du noeud : $\vec{P} = m \vec{g}$
- la force de flexion (force de rappel du ressort spirale) : $\vec{F}_{flexion} = -C_f (\theta - \theta_0) \vec{u}_k$
- la force de rappel du ressort de la barre k : $\vec{F}_r = -K_r (l - l_0) \frac{\vec{M}_k M_{k+1}}{\|\vec{M}_k M_{k+1}\|}$

2. Forces ne dérivant pas d'un potentiel :

- la force de réaction de l'amortisseur visqueux de la barre : $\vec{F}_v = -K_v \frac{\partial l}{\partial t} \frac{\vec{M}_k M_{k+1}}{\|\vec{M}_k M_{k+1}\|}$
- la force de frottement de l'air : $\vec{F}_{frottement} = -C_v \frac{\partial(\theta * l)}{\partial t} \vec{n}$ qui a sa direction perpendiculaire à la barre k (où C_v représente le coefficient de viscosité de l'air et \vec{n} un vecteur unitaire perpendiculaire à la barre).

Jusqu'à présent, la formulation retenue était celle du principe fondamental de la dynamique même si des travaux antérieurs [18] ont déjà employé la formulation lagrangienne. La formulation choisie était celle d'Euler qui donne des résultats satisfaisants. Cependant sa mise en place est lourde, aussi avons nous cherché une méthode plus souple dans la prise en compte des contraintes.

2.2 Les méthodes existantes à notre disposition

– Euler

Ce formalisme permet de déterminer l'évolution d'un système de points matériels grâce à la relation fondamentale de la dynamique :

$$\forall i \in [0, n[\quad m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i$$

où \vec{a}_i est l'accélération du point P_i et \vec{F}_i la résultante des forces appliquées à ce point.

Ces n équations permettent donc de déterminer les accélérations des points du système, à partir desquelles on calcule ensuite les vitesses puis les positions.

– Newton-Euler

Utilisé pour résoudre des problèmes de mécanique du solide, ce formalisme repose sur les équations de Newton-Euler :

$$\forall i \in [0, n[\quad \begin{cases} m_i \vec{a}_{G_i} = \vec{F}_i \\ I_{G_i} \vec{\Omega}_{S_i} + \vec{\Omega}_{S_i} \cdot I_{G_i} \cdot \vec{\Omega}_{S_i} = \vec{C}_{G_i} \end{cases}$$

où m_i est la masse du solide S_i , \vec{a}_{G_i} l'accélération de son centre de gravité G_i , \vec{F}_i la résultante des forces extérieures appliquées au solide, I_{G_i} la matrice d'inertie de S_i en G_i , $\vec{\Omega}_{S_i}$ la vitesse de rotation instantanée par rapport à R_g et \vec{C}_{G_i} le moment en G_i des efforts appliqués à S_i .

– Lagrange [19]

Ici, on ne considère pas directement les éléments matériels du système mais ses degrés de liberté, qui sont en fait l'ensemble des paramètres variables définissant le mouvement du système : cette façon d'aborder le problème permet d'envisager l'utilisation de ce formalisme pour une grande variété de systèmes, à la condition d'être

capable d'exprimer leur énergie cinétique en fonction de q (l'ensemble des degrés de liberté du système), de \dot{q} (la dérivée par rapport au temps de ces paramètres) et du temps. On pourrait ainsi (même si ça ne présente aucun intérêt pratique) utiliser les équations de Lagrange pour résoudre des problèmes de mécanique du point. Ces équations sont par contre très bien adaptées pour définir la dynamique d'un solide soumis à de nombreuses contraintes, comme par exemple un fil.

Le formalisme Lagrangien repose sur la formulation énergétique d'un système en mouvement. Les équations de Lagrange décrivent la relation entre l'énergie cinétique du système et la puissance des efforts appliqués dans chacun des mouvements du système en tout temps t :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial K}{\partial q_i} = Q_i - \frac{\partial E}{\partial q_i} \quad (2.1)$$

où K est l'énergie cinétique du système, fonction de q , \dot{q} et t , E est le potentiel des efforts dérivant d'un potentiel (comme le poids) et Q_i est la puissance des efforts autres que ceux dérivant d'un potentiel (comme les forces de frottement liées à la viscosité).

Ajout de contraintes :

Les contraintes permettent d'ajouter au système des critères de restriction du mouvement autres que ceux dus aux efforts externes. Il est ainsi possible de contrôler l'évolution des paramètres en leur imposant des limitations ou en liant certains d'entre eux. On distingue les contraintes par la forme de l'équation supplémentaire qu'elles ajoutent au système :

Type de contrainte	Equation associée
Holonome	$H_j(q) = 0$
Unilatérale	$U_j(q) \geq 0$
Cinématique	$C_j(q) \cdot \dot{q} + d_j(q) = 0$

TAB. 2.1 – Types de contraintes

On distinguera encore parmi les contraintes unilatérales les *contraintes unilatérales réalisées*, pour lesquelles on a $U_j(q) = 0$ à un instant t_0 , et les *contraintes unilatérales réalisées persistantes* pour lesquelles l'égalité demeure vérifiée pour $t > t_0$.

L'approche la plus naturelle pour gérer les contraintes consiste à utiliser les multiplicateurs de Lagrange, qui permettent d'introduire dans le système les puissances des efforts nécessaires à la réalisation des contraintes. Le système d'équations (2.1) devient alors :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial K}{\partial q_i} = Q_i - \frac{\partial E}{\partial q_i} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_j L_{ji} \text{ pour } i \in [0, n[\\ S_j(q, \dot{q}, t) = 0 \text{ pour } i \in [1, c] \end{cases} \quad (2.2)$$

où c est le nombre total de contraintes (holonomes, cinématiques et unilatérales réalisées persistantes), L_{ji} le coefficient en \dot{q}_i de l'expression linéaire de la contrainte j sur les \dot{q} (L_{ji} est égal à $\frac{\partial H_j}{\partial q_i}$, $\frac{\partial U_j}{\partial q_i}$ ou C_{ji} suivant le type de la contrainte), λ_j le multiplicateur de Lagrange de la contrainte j , inconnue en rapport avec l'intensité de l'effort nécessaire à la réalisation de la contrainte, et S_j l'équation sur les paramètres associée à la contrainte j .

Résolution symbolique ou numérique

Les formalismes décrits précédemment conduisent tous à un système d'équations différentielles qui, déterminé en fonction des valeurs des paramètres à l'instant t , permet après résolution de connaître les nouvelles valeurs à l'instant $t+h$ (h est appelé pas de temps). S'il existe de nombreuses méthodes pour résoudre un tel système, il existe également plusieurs démarches pour créer le système lui-même allant du "tout numérique" à la création purement formelle des équations. Si la première solution présente l'avantage de la rapidité, elle souffre cependant de l'inconvénient majeur de toute démarche numérique : les approximations nécessaires, notamment lors des calculs de dérivées, conduisent à des erreurs pouvant parfois se révéler lourdes de conséquences. A l'inverse, une approche purement formelle, extrêmement satisfaisante du point de vue de l'exactitude du système, se révèle souvent lourde en temps de traitement et de développement.

2.3 Application de la formulation lagrangienne au modèle

Considérons le modèle du fil défini précédemment (Fig. 2.4). Compte tenu du sujet qui limite l'étude au comportement en flexion du fil, nous considérerons pour la suite que la longueur des barres est fixe.

La formulation de Lagrange utilisant les coordonnées généralisées, et afin de simplifier le modèle du fil défini précédemment, les angles θ_i de chaque barre i sont désormais définis par rapport à la verticale (voir figure ci-dessous). L'angle entre les barres $L(i)$ et $L(i+1)$ est donc $\pi - \theta_i + \theta_{i+1}$.

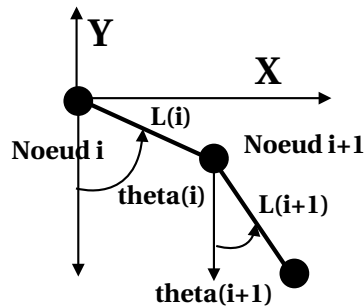


FIG. 2.5 – Coordonnées généralisées

D'autre part, les coordonnées absolues de chaque noeud s'expriment ainsi :

$$x_i(t) = \sum_{i=1}^n l * \sin(\theta_i(t)) \quad (2.3)$$

$$y_i(t) = \sum_{i=1}^n l * \cos(\theta_i(t)) \quad (2.4)$$

Notons $v_{x_i}(t)$ et $v_{y_i}(t)$ les projections de la vitesse $v_i(t)$ du noeud i sur les axes des abscisses et des ordonnées à l'instant t :

$$v_{x_i}(t) = \sum_{i=1}^n l * \dot{\theta}_i(t) * \cos(\theta_i(t))$$

$$v_{y_i}(t) = \sum_{i=1}^n -l * \dot{\theta}_i(t) * \sin(\theta_i(t))$$

2.3.1 Écriture du lagrangien

1. Bilan des énergies

– Énergie cinétique

L'énergie cinétique totale du système dans son mouvement par rapport à R_g est égal à la somme des énergies cinétiques de chacun des noeuds :

$$E_c = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m \cdot (v_{x_i}^2(t) + v_{y_i}^2(t)) \quad (2.5)$$

– Énergies potentielles

Il y a deux énergies potentielles : l'énergie potentielle de pesanteur et l'énergie potentielle du ressort.

L'énergie potentielle de pesanteur du système Σ s'écrit :

$$E_{ppesanteur} = \sum_{i=1}^n m \cdot g \cdot y_i(t)$$

L'énergie potentielle associée au modèle de flexion tel que décrit à la figure 2.3 est égale à $E_{pflexion} = \frac{1}{2} C_f (\theta_{i-1}(t) - \theta_i(t))^2$ en posant $\theta_0 = \pi$. L'angle θ_0 choisi est tel que la force de flexion tend toujours à ramener les barres alignées les unes avec les autres. L'énergie potentielle des ressorts du système Σ associée à la force s'écrit alors :

$$E_{pflexion} = \sum_{i=2}^n \frac{1}{2} C_f (\theta_{i-1}(t) - \theta_i(t))^2$$

L'énergie potentielle du système Σ s'écrit comme la somme des énergies potentielles de ressort et de pesanteur :

$$E_p = \sum_{i=1}^n m \cdot g \cdot y_i(t) + \sum_{i=2}^n \frac{1}{2} C_f (\theta_{i-1}(t) - \theta_i(t))^2 \quad (2.6)$$

2. Obtention du Lagrangien

Le lagrangien L s'exprime comme la différence entre l'énergie cinétique T et l'énergie potentielle V . (2.5)-(2.6) donne donc :

$$L = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m \cdot (v_{x_i}^2(t) + v_{y_i}^2(t)) - m \cdot g \cdot y_i(t) - \sum_{i=2}^n \frac{1}{2} C_f (\theta_{i-1}(t) - \theta_i(t))^2$$

2.3.2 Obtention du système d'équations différentielles

Appliquons à notre lagrangien l'équation 2.1 en ayant comme coordonnées généralisées les angles θ_i . Nous obtenons pour le noeud i l'équation différentielle du mouvement suivante :

$$\begin{aligned}
& m l^2 [-\dot{\theta}_i(t) \sin(\theta_i(t)) \sum_{k=1}^n \dot{\theta}_k(t) \cos(\theta_k) + \cos(\theta_i(t)) \sum_{k=1}^n (\ddot{\theta}_k(t) \cos(\theta_k(t)) - \dot{\theta}_i^2 \sin(\theta_i(t))) + \\
& \dot{\theta}_i(t) \cos(\theta_i(t)) \sum_{k=1}^n \dot{\theta}_k(t) \sin(\theta_k) + \sin(\theta_i(t)) \sum_{k=1}^n (\ddot{\theta}_k(t) \sin(\theta_k(t)) + \dot{\theta}_i^2 \cos(\theta_i(t)))] + \quad (2.7) \\
& m l [-\dot{\theta}_i(t) \sin(\theta_i(t)) \sum_{k=1}^n (\dot{\theta}_k(t) \cos(\theta_k(t))) + \dot{\theta}_i(t) \cos(\theta_i(t)) \sum_{k=1}^n \dot{\theta}_k(t) \sin(\theta_k(t))] + \\
& m g l C_f (\theta_{i-1} - \theta_i) = C_v \dot{\theta}_i(t)
\end{aligned}$$

Cette équation est vraie pour $i \neq 1$. Pour $i = 1$, il faut enlever de l'équation ci-dessus le terme $m g l C_f (\theta_{i-1} - \theta_i)$.

Pour n noeuds, on obtient un système de n équations différentielles avec pour inconnues les coordonnées généralisées θ_i ($i=1..n$). La résolution de ce système d'équations, en ajoutant les conditions initiales, permet de simuler l'évolution temporelle d'un système non-commandé : l'évolution du tombé d'un fil fixé à une extrémité, l'origine. Pour commander le fil, il est nécessaire d'ajouter des équations de contraintes au système précédemment défini : il est alors possible de fixer le fil à son autre extrémité ou de figer les angles.

2.3.3 Commande du système par ajout de contraintes

L'introduction de contraintes et de multiplicateurs de Lagrange dans le système précédent rend le système commandable afin de simuler différents comportements. Nous rappelons que l'extrémité origine (x_0, y_0) est fixe tout au long du temps d'après la mise en équation et dans tout le développement qui suit.

– Cas1. Exemple de contrainte holonome : fixer l'extrémité libre du fil à tout instant Ceci équivaut à fixer $x_n(t) = cte$ et $y_n(t) = cte \forall t$ et dans le cas de contraintes holonomes (cas présent), il est nécessaire de dériver ces équations pour obtenir les L_{ji} .

$$x_n(t) = \sum_{i=1}^n l \sin(\theta_i(t))$$

$$y_n(t) = \sum_{i=1}^n l \cos(\theta_i(t))$$

D'après (eq. 2.2) et (fig. 2.1), nous déduisons des deux équations précédentes l'expression des L_{ji} et S_j (nous sommes dans le cas des contraintes holonomes) :

$$\begin{aligned} L_{1i} &= l \cos(\theta_i(t)) \\ L_{2i} &= -l \sin(\theta_i(t)) \\ S_1 &= \sum_{i=1}^n l \dot{\theta}_i(t) \cos(\theta_i(t)) \\ S_2 &= \sum_{i=1}^n -l \dot{\theta}_i(t) \sin(\theta_i(t)) \end{aligned}$$

– Cas2. Immobilisation d'une barre au cours du temps

Si nous désirons maintenant garder une barre fixe, on a la contrainte holonome suivante pour cette barre : $\theta_i(t) = cte \forall t$. On ajoute alors (eq. 2.2) :

$$\begin{aligned} L_{3j} &= 1 \\ S_3 &= \dot{\theta}_i(t) \end{aligned}$$

– Cas3. Autre exemple : Contrainte cinématique sur l'extrémité libre du fil

La contrainte est dans ce cas équivalente à $\dot{x}_n = cte$ et $\dot{y}_n = cte$

$$\begin{aligned} \dot{x}_n &= \sum_{i=1}^n l \dot{\theta}_i(t) \cos(\theta_i(t)) \\ \dot{y}_n &= \sum_{i=1}^n l \dot{\theta}_i(t) \sin(\theta_i(t)) \end{aligned}$$

D'après (eq. 2.2) et (fig. 2.1), nous en déduisons que nous sommes bien dans le cas de contraintes cinématiques et donc :

$$\begin{aligned} L_{1i} &= l \cos(\theta_i(t)) \\ L_{2i} &= -l \sin(\theta_i(t)) \\ S_1 &= -\dot{x}_n + \sum_{i=1}^n l \dot{\theta}_i(t) \cos(\theta_i(t)) \\ S_2 &= -\dot{y}_n + \sum_{i=1}^n -l \dot{\theta}_i(t) \sin(\theta_i(t)) \end{aligned}$$

3

Développement et résultats

3.1 Modélisation sous forme de blocs avec Simulink

Dans un premier temps, nous avons appliqué les équations de Lagrange à notre modèle pour deux noeuds sans contrainte. Pour résoudre le système de deux équations différentielles et simuler le résultat, nous avons utilisé Simulink sous Matlab (cf. diagramme blocs ci-dessous).

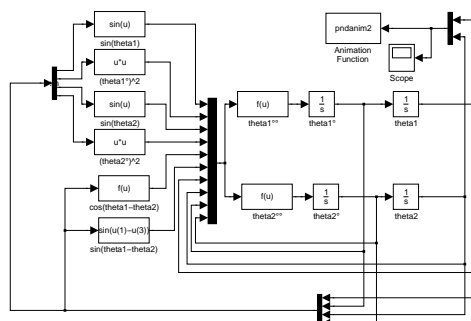


FIG. 3.1 – Modèle avec Simulink

Nous avons de cette façon obtenu la simulation du tombé de deux barres liées entre elles par une liaison pivot et un ressort.

Cette méthode de résolution des équations différentielles est cependant fastidieuse à mettre en place car il faut écrire manuellement les équations, puis les simplifier et enfin les modéliser par blocs [18]. De plus, comme chaque inconnue représentant une coordonnée généralisée est présente dans chaque équation du système, cela implique un bouclage interne du système de plus en plus complexe.

Nous nous sommes donc orienté vers une méthode formelle permettant d'écrire au-

tomatiquement le système d'équations différentielles en fonction du nombre de barres désiré puis de le résoudre numériquement. Nous avons pour cela utilisé Maple qui est un logiciel de calcul formel et dassl qui est une librairie capable de résoudre un système algébro-différentiel.

3.2 Écriture formelle du système d'équations différentielles avec Maple

Notre objectif en utilisant Maple[20] a été d'écrire, quelque soit le nombre de barres, le système d'équations différentielles de manière formelle, de le simplifier puis de le résoudre en donnant des valeurs numériques aux variables pour visualiser graphiquement les solutions.

Le système d'équations écrit de manière formelle a l'avantage de pouvoir être repris pour être utilisé dans d'autres logiciels.

Voici le diagramme représentatif des différentes étapes du programme que nous avons écrit en syntaxe Maple (voir Annexe) pour générer le système d'équations différentielles correspondant à notre modèle :

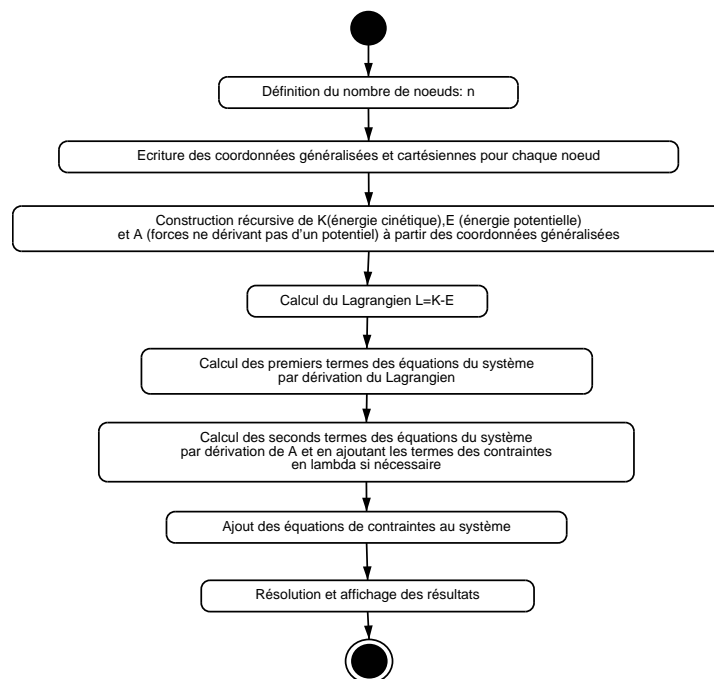


FIG. 3.2 – Diagramme Maple

Les différentes étapes font référence aux équations de la partie 2.3.

Ci-dessous un exemple de système algébro-différentiel généré par notre programme (fig.3.2) pour un fil fixé à ses deux extrémités avec $n=3$:

$$\left\{ \begin{array}{l} m l^2 \sin(\theta_1(t) - \theta_3(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta_3(t) \right)^2 + 3 m l^2 \frac{d^2}{dt^2} \theta_1(t) + 2 m l^2 \cos(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \frac{d^2}{dt^2} \theta_2(t) \\ - c f \theta_2(t) + c f \theta_1(t) = c v \frac{d}{dt} \theta_1(t) + \lambda_1 l \sin(\theta_1(t)) - \lambda_2 l \cos(\theta_1(t)) \\ \\ m l^2 \sin(\theta_2(t) - \theta_3(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta_3(t) \right)^2 + 2 m l^2 \cos(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \frac{d^2}{dt^2} \theta_1(t) + 2 m l^2 \frac{d^2}{dt^2} \theta_2(t) \\ + m l^2 \cos(\theta_2(t) - \theta_3(t)) \frac{d^2}{dt^2} \theta_3(t) - 2 m l^2 \sin(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta_1(t) \right)^2 - c f \theta_3(t) \\ + 2 m g l \sin(\theta_2(t)) - c f \theta_1(t) + 2 c f \theta_2(t) = c v \frac{d}{dt} \theta_2(t) + \lambda_1 l \sin(\theta_2(t)) - \lambda_2 l \cos(\theta_2(t)) \\ \\ m l^2 \cos(\theta_1(t) - \theta_3(t)) \frac{d^2}{dt^2} \theta_1(t) + m l^2 \cos(\theta_2(t) - \theta_3(t)) \frac{d^2}{dt^2} \theta_2(t) + m l^2 \frac{d^2}{dt^2} \theta_3(t) \\ - m l^2 \sin(\theta_2(t) - \theta_3(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta_2(t) \right)^2 - m l^2 \sin(\theta_1(t) - \theta_3(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta_1(t) \right)^2 - c f \theta_2(t) \\ + m g l \sin(\theta_3(t)) + c f \theta_3(t) = c v \frac{d}{dt} \theta_3(t) + \lambda_1 l \sin(\theta_3(t)) - \lambda_2 l \cos(\theta_3(t)) \\ \\ \sum_{i=1}^3 l \dot{\theta}_i(t) \sin(\theta_i(t)) = c t e \\ \\ \sum_{i=1}^3 l \dot{\theta}_i(t) \sin(\theta_i(t)) = c t e \end{array} \right.$$

Pour résumer, on peut représenter le système de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_E(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i) = M_D(q_i) + M_C(q_i, \lambda_j) \\ C_j \quad i \in [1, n] \quad j \in [1, c] \end{array} \right.$$

où M_E est la matrice d'énergie, M_D la matrice de dissipation, M_C la matrice de contraintes et C_j les équations supplémentaires de contraintes. Nous rappelons que q_i correspond aux coordonnées généralisées qui se réduisent dans notre cas aux θ_i .

3.3 Résolution numérique du système avec Scilab et dassl

Maple permet de résoudre des systèmes d'équations différentielles et d'en tracer les solutions. Cette résolution demande cependant beaucoup de temps pour un faible nombre de barres. L'utilisation d'un solveur algébro-différentiel tel que dassl[21] nous a apparu

comme étant la meilleure solution [22] (Dassl est une librairie de Scilab permettant la résolution de systèmes DAE¹). Cela nous a permis de diminuer notablement le temps de calcul et davantage encore par compilation en langage Fortran du système avant sa résolution avec dassl (facteur d'accélération de 50).

Dassl permet la résolution d'équations du type $M(t)\dot{y} = f(t, y)$ où $M(t)$, la matrice de masse, est singulière (DAE). Le système a une solution uniquement si la condition initiale y_0 permet d'obtenir une solution \dot{y}_0 pour la pente initiale. En d'autres termes, il faut que les conditions initiales y_0 et \dot{y}_0 vérifient l'équation $M(t_0)\dot{y}_0 = f(t_0, y_0)$.

3.4 Résultats

3.4.1 Tombé d'un fil avec une contrainte

Le tombé d'un fil est l'expérience la plus simple pouvant être réalisée pour mettre en évidence la flexion d'un fil : plus la force de flexion est grande, plus le fil a tendance à se rapprocher de l'horizontale (fil rigide). La manipulation consiste à placer le fil à l'horizontale puis à le lâcher en attendant qu'il se stabilise dans sa position d'équilibre vertical. Il faut noter que plus la longueur totale du fil est importante, plus le fil a tendance "à se casser" et à se rapprocher de la verticale car son poids total est alors plus important et tend à s'opposer à la force de flexion.

Pour mettre en évidence ces phénomènes et comparer notre modèle à la réalité, nous avons mis en oeuvre deux expériences : la première consiste à simuler le tombé de deux fils de même longueur pour des coefficients de flexion identiques mais pour des masses linéiques différentes afin d'analyser l'influence de la masse totale du fil. La deuxième consiste à simuler le tombé de plusieurs fils de coefficients de flexions différents mais de longueurs identiques.

La figure 3.3 représente deux fils de 28 barres de longueur 1 mm pour un coefficient de flexion de $25 \cdot 10^{-6} N.m.rad^{-1}$ et pour des masses linéiques respectives de 15 et 20 Tex². On a posé comme contrainte que la première barre reste horizontale. On constate que le modèle donne les mêmes résultats que dans la réalité : la force de flexion tend à s'opposer

¹Differential Algebraic Equation

²Le Tex est une unité utilisée dans le textile pour caractériser la masse linéique d'un fil. 1 Tex = 1g/km

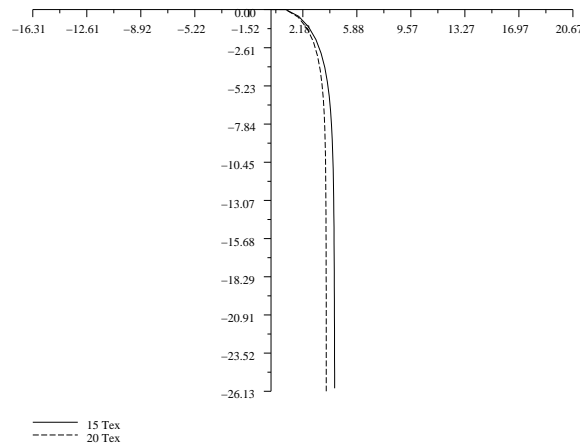


FIG. 3.3 – Variation de la masse linéique du fil pour un C_f donné

au poids total du fil. La durée de la simulation pour ces deux fils de 28 barres a été de 6 secondes. La résolution d'un tel système pour un fil et 15 barres prenait 5 minutes après linéarisation et sans contrainte sur la première barre d'après les précédents travaux [23]. Pour cette figure comme pour les suivantes, les unités des axes sont des mm.

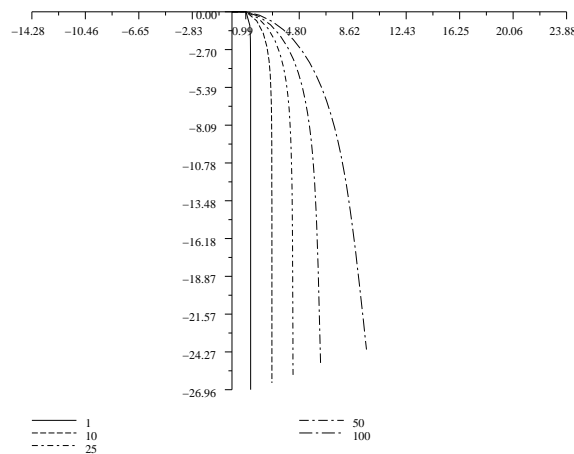


FIG. 3.4 – Variation de C_f pour les autres paramètres constants

La figure 3.4 représente 5 fils composés de 28 barres de 1 mm et de coefficients de flexion respectifs $[1 \ 10 \ 25 \ 50 \ 100] \cdot 10^{-6} \text{ N.m.rad}^{-1}$. Chaque fil fait 15 Tex. Les simulations sont conformes aux résultats attendus : plus le coefficient de flexion est important, plus le fil se rapproche de l'horizontale.

Compte tenu des deux expériences précédentes, nous avons tenu à en réaliser une troisième qui tienne compte des paramètres de poids total du fil et de force de flexion. Pour cela, nous avons simulé le tombé de différents fils (fig. 3.5) de longueurs différentes et de coefficient de flexion constant ($C_f = 25 \cdot 10^{-6}$).

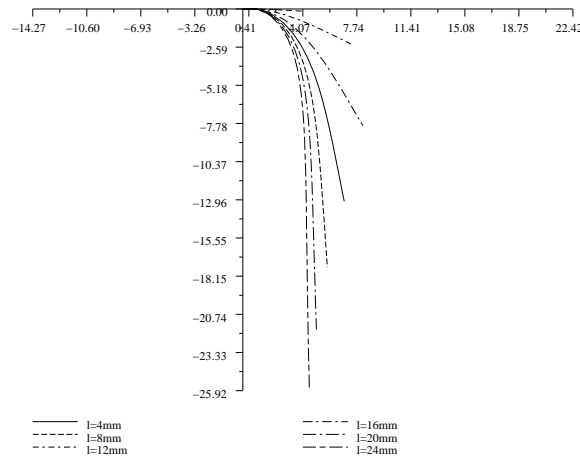


FIG. 3.5 – C_f constant et longueur variable

D'après la figure 3.5, nous observons que pour de faibles longueurs de fil, l'écart entre les différentes courbes est faible car le poids du fil est négligeable par rapport à la force de flexion. Ensuite, au fur et à mesure que la longueur de fil augmente, l'écart entre les courbes augmente pour passer à un maximum avant de diminuer quand le poids total du fil devient supérieur à la force de flexion. Cette expérience rejoint celle réalisée pour le tissu dans le cadre de l'étude du lieu géométrique occupé par l'extrémité du tissu lors du tombé [17]. Lors de l'expérience, il existe donc une longueur de fil optimale pour laquelle on obtiendra le maximum de précision dans le cadre d'une identification.

Dans le but d'identifier avec précision le coefficient de flexion, un des objectifs de la modélisation est de trouver le type de courbe qui soit le plus sensible possible aux variations du coefficient. L'étude exposée ci-dessus donne un premier résultat. D'autres types de courbes sont également envisageables...

3.4.2 Courbe “de la chaînette horizontale”

Nous avons ensuite pensé à réaliser des courbes du type chaînette. La courbe de la chaînette correspond à la forme prise par un fil pesant flexible homogène inextensible suspendu entre deux points, c'est-à-dire que son coefficient de flexion est nul par rapport à notre modèle.

Nous allons fixer notre fil aux deux extrémités en imposant à la première et la dernière barre de rester horizontale de façon à avoir une tangente horizontale aux deux extrémités.

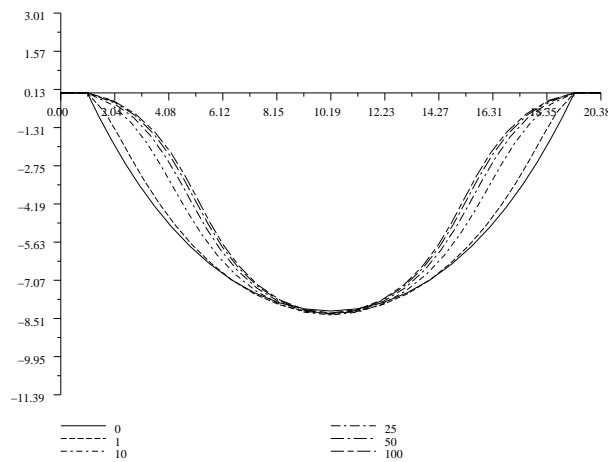


FIG. 3.6 – Variation de C_f pour les autres paramètres constants

La figure 3.6 représente une famille de courbes correspondant aux coefficients de flexion $[0 \ 1 \ 10 \ 25 \ 50 \ 100] \cdot 10^{-6} \text{ N.m.rad}^{-1}$ et pour un fil de 15 Tex. Le coefficient 0 correspond à la courbe de la chaînette. On observe que plus le coefficient de flexion augmente, plus les courbes sont proches. Si on augmente la masse linéique du fil, l'écart entre les courbes augmente. Ce type de courbe pourra donc être utilisé pour des coefficients de flexion en dessous d'un certain seuil pour la masse linéique du fil étudié.

3.4.3 Courbe “de la chaînette verticale”

La courbe de la chaînette nous a montré que la flexion compense le poids du fil et qu'au delà d'un certain seuil de flexion, l'écart entre les courbes est minime. Nous avons par conséquent cherché à augmenter l'influence du poids. Pour cela, nous avons fait une rotation de $\pi/2$ de la courbe de la chaînette de façon à faire intervenir deux fois l'influence

du poids :

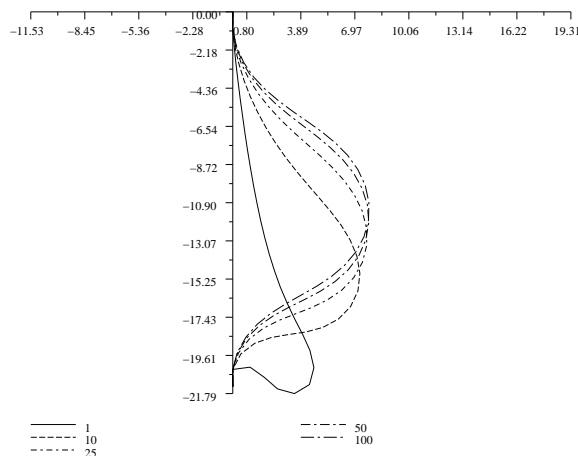


FIG. 3.7 – Courbes “de la chaînette verticale” pour différents C_f

La figure 3.7 représente une famille de courbes correspondant aux coefficients de flexion $[0 \ 1 \ 10 \ 25 \ 50 \ 100] \cdot 10^{-6} \text{ N.m.rad}^{-1}$ et pour un fil de 15 Tex. On remarque ainsi que l'écart entre les courbes de $50 \cdot 10^{-6}$ et $100 \cdot 10^{-6} \text{ N.m.rad}^{-1}$ est deux fois plus important que dans le cas de la courbe de la chaînette horizontale. Dans le cadre d'une identification, la courbe de la chaînette verticale permet donc d'avoir une précision double par rapport à la courbe de la chaînette horizontale.

D'une façon plus générale, on utilisera la courbe de la chaînette verticale dans le cas de faibles coefficients de flexion (écart entre les courbes important) et dans le cas de coefficients de flexion importants, on utilisera le tombé du fil avec une contrainte.

Conclusion

On peut dire que les résultats précédents correspondent tout à fait aux attentes théoriques compte tenu de la qualité visuelle des résultats. Ces simulations valident donc le modèle de fil élaboré. Nous allons maintenant le comparer à la réalité

3.5 Identification

Compte tenu des résultats présentés ci-dessus, nous nous rendons compte que l'expérience du tombé du fil avec une contrainte est celle permettant d'obtenir le coefficient de

flexion avec le plus de précision sachant que nous ne le connaissons pas. Si le coefficient de flexion est faible, nous pourrions alors envisager d'utiliser la courbe de la chaînette verticale.

Afin de déterminer expérimentalement le coefficient de flexion d'un fil, nous nous proposons de mettre en place une expérience d'identification des paramètres du fil.

3.5.1 Mode opératoire

L'expérience consiste à placer le fil sur le bord d'une surface possédant une arête droite puis à prendre avec une caméra reliée à un ordinateur une image du fil tombé une fois stabilisé. Nous faisons ensuite un traitement d'image dans le but de garder uniquement l'image du fil. Celle-ci est traitée afin d'en récupérer les coordonnées des points. Nous faisons enfin une interpolation polynomiale en utilisant la méthode des moindres carrés pour obtenir l'équation du fil. Celle-ci est employée dans la méthode d'identification dichotomique utilisant la méthode de la distance quadratique. A l'issue de cette dernière opération, nous obtenons le coefficient de flexion avec la précision souhaitée.

3.5.2 Résultats

Pour l'expérience qui suit, le fil utilisé a une longueur de 52 mm et un titre de 14.6 Tex. Voici l'image enregistrée par la caméra. C'est une image en niveaux de gris de taille 512x512 (fig. 3.8 à gauche).

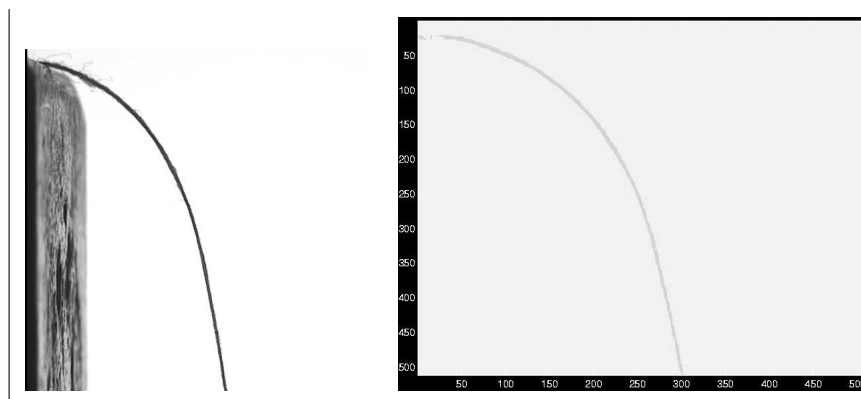


FIG. 3.8 – Image avant traitement et après binarisation

Pour isoler le fil, on effectue une binarisation à un seuil correspondant aux niveaux de gris du fil.

On effectue ensuite une interpolation de la courbe avec un polynôme de degré 5 (fig.3.9) après avoir changé d'échelle pour faire correspondre les pixels aux distances en mm. On choisit le degré 5 car les polynômes de degré impair correspondent à des fonctions impaires. On est donc assuré d'obtenir une tangente horizontale à l'origine. Les polynômes d'ordre 3 offrent une précision insuffisante et ceux d'ordre 7 une précision inutile. La caractérisation de la courbe du fil réel avec un polynôme permet lors de l'identification d'obtenir l'ordonnée correspondant à n'importe quel abscisse.

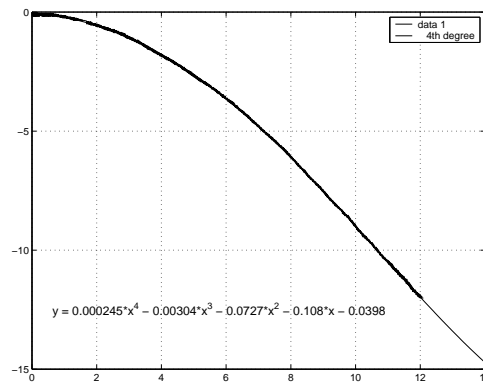


FIG. 3.9 – Interpolation polynomiale

Compte tenu de la caméra utilisée, le cadre filmé a pour longueurs maximales 15x15mm. On appliquera donc le critère d'identification (distance quadratique) uniquement sur la longueur de fil prise par la caméra.

L'identification a été réalisée en utilisant un fil simulé de 52 barres de 1mm chacune (fig. 3.10).

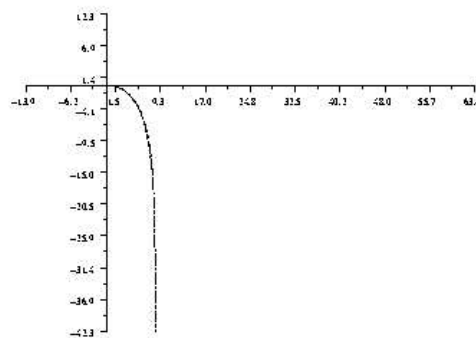


FIG. 3.10 – Identification

Les courbes réelle et simulée se superposent quasiment et nous obtenons comme valeur

du coefficient de flexion $1.9 \cdot 10^{-4} \text{ N.m.rad}^{-1}$.

3.5.3 Conclusion

Ce résultat brut ne permet pas de conclure quant à la précision du résultat. Faute de temps, nous n'avons pu réaliser d'autres essais avec différentes longueurs de fil et différents types de courbes pour analyser leur influence sur la valeur du coefficient de flexion.

Conclusion

En partant du modèle du fil développé au sein du laboratoire, nous avons utilisé le formalisme lagrangien qui nous permet de par sa souplesse de fixer des contraintes très aisément. Son implémentation avec Maple a rendu l'écriture du système d'équations automatique, ce qui constitue déjà un grand pas par rapport aux travaux antérieurs. Nous avons ensuite réussi la résolution du système d'équations algébriques avec dassl de façon numérique et sans linéarisation préalable. De plus cette résolution, optimisée en Fortran, donne des résultats très rapides et très réalistes.

Quant à l'identification, elle donne des premiers résultats tout à fait satisfaisants bien que d'autres essais restent à réaliser. Les résultats des simulations valident le modèle du fil, sa mise en équation ainsi que la méthode de résolution. Une discussion sur la précision des résultats de l'identification est à envisager ainsi que l'étude d'autres types de courbes.

Nous pouvons par ailleurs souligner que notre méthode de mise en équation et de résolution peut être utilisée dans d'autres domaines. Une modélisation du tissu basée sur cette méthode est d'ailleurs en cours.

Enfin, ces travaux de recherche ont été enrichissants à plus d'un titre de part la pluridisciplinarité de l'étude : modélisation, identification, simulation, mathématiques, mécanique, physique et textile. Ils nous ont permis, en même temps, d'exploiter l'enseignement reçu à l'ENSAIT et de mettre en application les cours de DEA.

Annexe

Résolution du tombé d'un fil décrit par n barres par modélisation Lagrangienne

Ecriture du Lagrangien en fonction des énergies cinétiques et potentielles F : forces extérieures appliquées au système qui ne dérivent pas d'un potentiel.

```
> restart:
> n:=2:
> x[0](t):=0:
> y[0](t):=0:
> Ttot:=0:
> Vtot:=0:
> for j from 1 to n do
> x[j](t):=x[j-1](t) + l*sin(theta[j](t));
> y[j](t):=y[j-1](t) - l*cos(theta[j](t));
> vx[j](t):=diff(x[j](t),t);
> vy[j](t):=diff(y[j](t),t);
> T[j]:=1/2*m*(vx[j](t)^2+vy[j](t)^2); #Energie cinétique
> if (j=1) then Eressort:=0 else
> Eressort:=1/2*cf*(pi+theta[j-1](t)+theta[j](t))^2 end;
> V[j]:=simplify(-m*g*y[j](t)+Eressort); #Energie potentielle
> Ttot:=Ttot+T[j];
> Vtot:=Vtot+V[j];
> od:
> simplify(Vtot);
> Ttot;
> L:=simplify(combine(factor(Ttot),trig))+simplify(Vtot); #L=T-V
```

Procédure d'obtention du Lagrangien par rapport aux différentes coordonnées généralisées

```

> Lagra1:=proc(L,vars)
> local k, equs, i, tempo;
> k:=nops(vars);
> equs:=array(1..k);
> for i from 1 to k do
> equs[i]:=Deriv(L,diff(vars[i],t));
> equs[i]:=diff(equs[i],t);
> equs[i]:=expand(equs[i]);
> tempo:=Deriv(L,vars[i]);
> equs[i]:=collect(equs[i]-expand(tempo),diff);
> od;
> RETURN(equs);
> end:

```

Résolution et tracé

```

> for j from 1 to n do
> vars:=[theta[j](t)];
> for i from 1 to nops(vars) do
> equl[j,i]:=Lagra1(L,vars)[i]=cv*Deriv(theta[j](t),t);
> od;
> od;
> vals:={m=15E-9,g=9.81,l=1,cv=1.8E-5,cf=20E-6};
> syst[1]:={combine(equl[1,1],trig)}:
> cond[1]:={theta[1](0)=1,D(theta[1])(0)=0}:
> param[1]:={theta[1](t)}:
> systn:=syst[1]: condn:=cond[1]:paramn:=param[1]:
> for j from 2 to n do
> syst[j]:={combine(equl[j,1],trig)}:
> cond[j]:={theta[j](0)=1,D(theta[j])(0)=0}:
> param[j]:={theta[j](t)}:
> systn:=systn union syst[j]:
> condn:=condn union cond[j]:
> paramn:=paramn union param[j]:
> od;
> systn:=systn union condn;
> systn1:=subs(vals,systn);
> Fon1:=dsolve(systn1,paramn,type=numeric,method=classical[rk2]);
> for j from 1 to n do
> Thetasol[j]:=t->rhs(Fon1(t)[2*j]);
> plot({Thetasol[j]},0..12);
> od;

```

Bibliographie

- [1] Peirce (F. T.). – The geometry of cloth structure. *The journal of the textile institute*, vol. 46, n°5, 1930, pages : 45–96.
- [2] Kemp (A.). – An extension of peirce’s cloth geometry to the treatment of non-circular threads. *The journal of the textile institute*, vol. 49, n°1, janvier 1958, pages : 44–48.
- [3] Kawabata (S.), Niwa (M.) et Kwai (H.). – The finite deformation theory of plain weave part i : the biaxial deformation theory. *The journal of the textile institute*, no2, fevrier 1973, page : 62.
- [4] Grosberg (P.) et Kedia (S.). – The mechanical properties of woven fabrics part i : the initial load extension modulus of woven fabrics. *Textile Research Journal*, vol. 36, n°1, janvier 1966, pages : 71–79.
- [5] Grosberg (P.). – The mechanical properties of woven fabrics part ii : the bending of woven fabrics. *Textile Research Journal*, vol. 36, n°3, mars 1966, pages : 205–211.
- [6] Abbot (G. M.), Grosberg (P.) et Leaf (G. A. V.). – The elastic resistance to bending of plain-woven fabrics. *The journal of the textile institute*, vol. 64, n°6, juin 1973, page : 346.
- [7] Olofson (B.). – A theory of elasto-plastic buckling. *The journal of the textile institute*, vol. 58, n°6, juin 1967, page : 221.
- [8] Skelton (J.). – Fundamentals of fabric shear. *Textile Research Journal*, vol. 46, n°12, 1976, pages : 862–869.
- [9] Postle (R.), Carnaby (G. A.) et Jong (S. De). – Energy methods of analysis. – 1988.
- [10] Breen (David E.), House (Donald H.) et Wozny (Michael J.). – Predicting the drape of woven cloth using interacting particles. – In *Proceedings of SIGGRAPH 94*, Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, pages : 365–372, Orlando (Floride), juillet 1994. ACM Press.

-
- [11] Realff (M.L.), Boyce (M.C.) et Backer (S.). – A micromechanical model of the tensile behavior of woven fabric. *Textile Research Journal*, vol. 67, n°6, juin 1997, pages : 445–459.
- [12] Realff (M. L.). – Identifying local deformation phenomena during woven fabric uniaxial tensile loading. *Textile Research Journal*, vol. 64, n°3, mars 1994, pages : 135–141.
- [13] Zhou (N.) et Ghost (T. K.). – On-line measurement of fabric bending behavior part i : Theoretical study of static fabric loops. *Textile Research Journal*, 1997, pages : 712–719.
- [14] Zhou (N.) et Ghost (T. K.). – On-line measurement of fabric bending behavior part ii : Effects of fabric nonlinear bending behavior. *Textile Research Journal*, 1997, pages : 712–719.
- [15] Zhou (N.) et Ghost (T. K.). – On-line measurement of fabric bending behavior part iii : Dynamic considerations and experimental implementation. *Textile Research Journal*, 1999, pages : 176–184.
- [16] Lwanga (A.). – *Mesures des paramètres du modèle mathématique du fil par prise d'images en temps réel.* – Mémoire de fin d'études, Ecole Nationale Supérieure des Arts et Industries Textiles, 1999.
- [17] Kacem (I.). – *Contribution à la modélisation des structures textiles enduites.* – Mémoire de D.E.A., Université des Sciences et Technologies de Lille, 2000.
- [18] Ghith (A.), Bruniaux (P.), Koncar (V.) et Vasseur (C.). – Modeling and simulation of a falling yarn with one end fixed. *Textile Research Journal*, 1997, pages : 321–324.
- [19] Goldstein (H.). – *Mécanique Classique.* – Presses Universitaires de France, 1964.
- [20] Dumas (P.) et Gourdon (X.). – *Une introduction à Maple.* – Rapport technique n 173, INRIA, juin 1995.
- [21] Petzold (L.R.). – A description of dassl : a differential/algebraic system solver. – In *Proc. 10th IMACS World Congress*, août 1982.
- [22] Gomez (C.). – Simulation de systèmes dynamiques. *GNU/Linux Magazine France*, mai 2000, pages : 22–28.
- [23] Legrand (X.). – *Contribution à la modélisation dynamique et à l'identification de tissus techniques.* – Thèse de doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille, 2000.