Les preuves sans mots

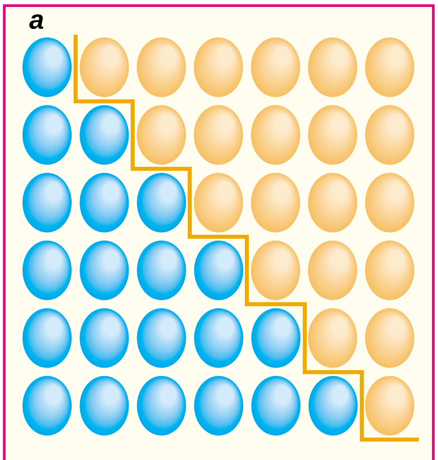
JEAN-PAUL DELAHAYE

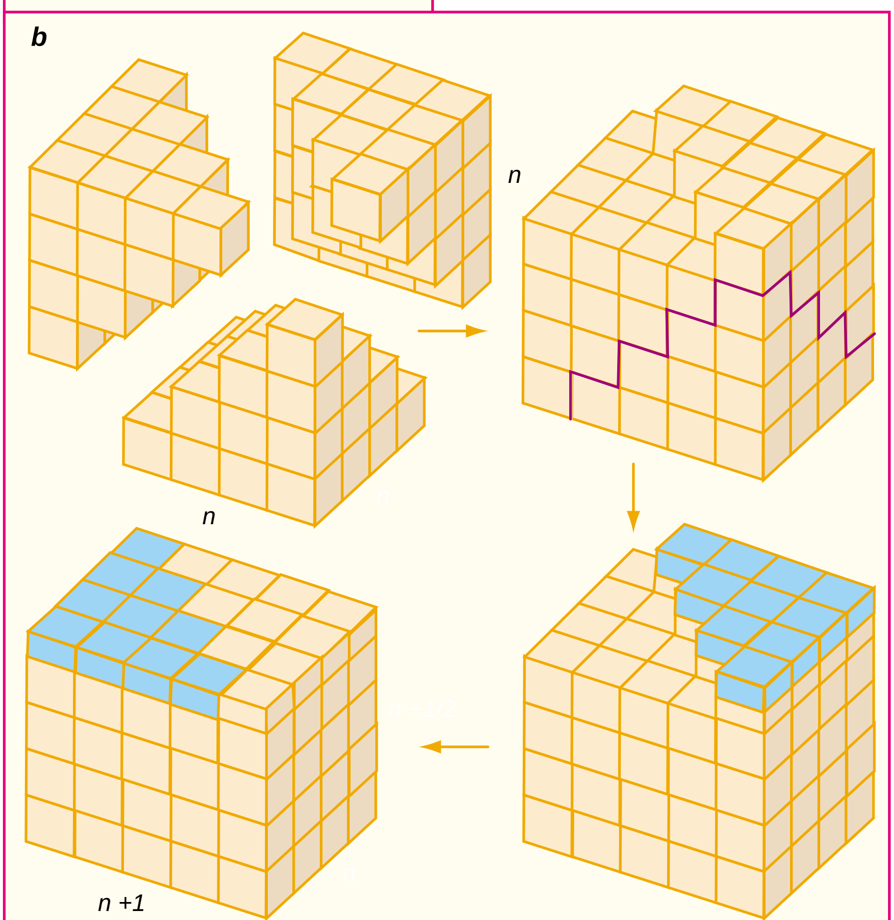
En mathématiques, un petit dessin vaut-il mieux qu'un long discours ?

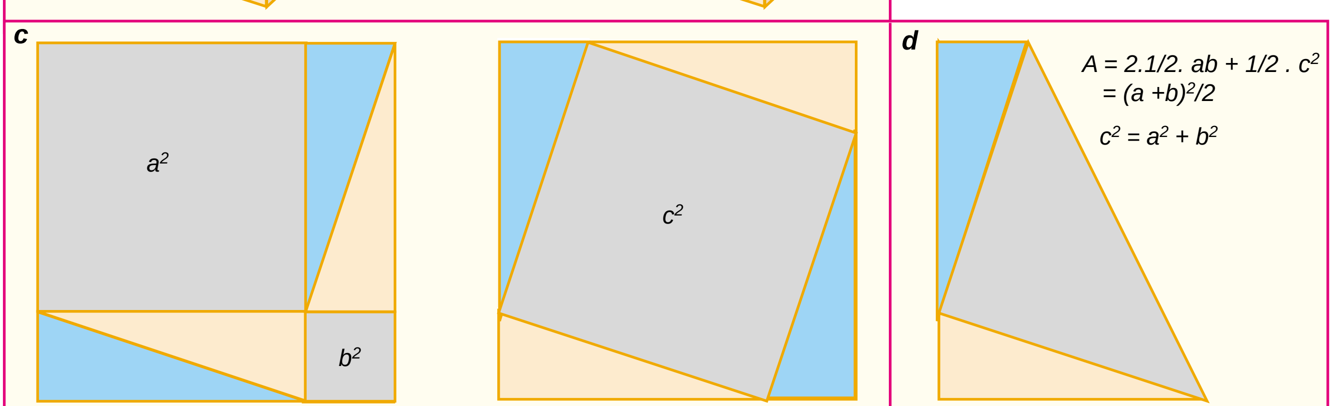
Il y a quelques années, il était bien vu de mettre le moins possible de dessins dans un livre de géométrie. On trouve encore en vente des ouvrages de géométrie dont certains chapitres ne comportent absolument aucune figure : j'en ai un chez moi, paru en 1967, dont le chapitre sur les barycentres ne contient aucun triangle, aucun segment, ni aucune illustration d'aucune sorte !

Le grand traité de mathématiques de Nicolas Bourbaki ne possède pas de tome consacré exclusivement à la géométrie, mais inclut quand même un livre d'algèbre de plus de 500 pages qui traite de droites, de plans, d'espaces, de parallèles, de parallélogrammes, de symétries, d'homothéties, de projections, de quadrilatères, du théorème fondamental de la géométrie projective, du théorème de Pappus, du théorème de Desargues, etc. Pas une figure !

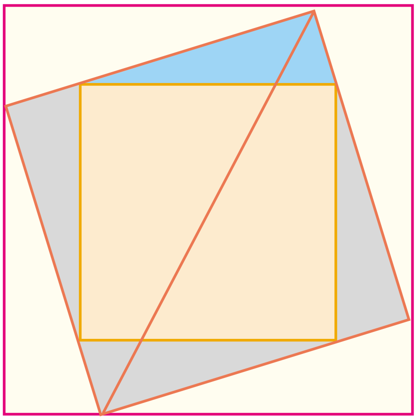
L'idée derrière ce qui semble de navrantes aberrations est qu'une figure ne prouve rien et qu'au contraire, il faut s'en méfier, car elle n'est jamais *quelconque* : quand vous dessinez un triangle, il possède peut-être une caractéristique particulière qui vous donne l'illusion d'un résultat général erroné. Le raisonnement, même quand il concerne des



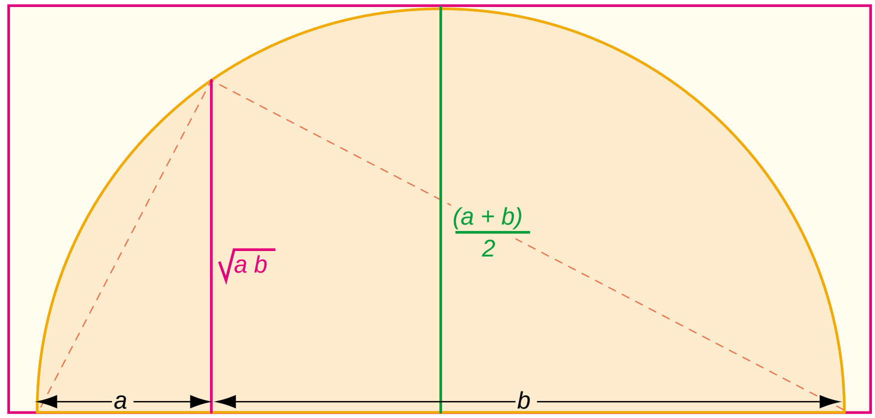




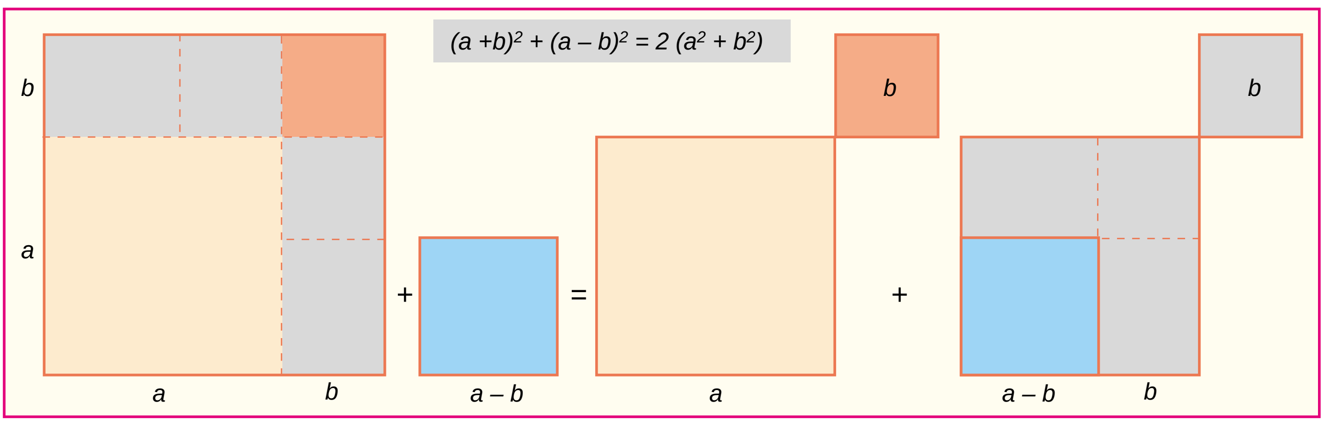
1. ***(a)*** **: Preuve de $1 + 2 + 3 + ... + n = n(n + 1)/2$.** ***(b)*** **: Preuve de $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = 1/3[n(n + 1)(n + 1/2)]$. Preuve due à Man-Keung Siu (1984).** ***(c)*** **et** ***(d)*** **: deux démonstrations du théorème de Pythagore. La première est due à un auteur inconnu qui vivait en Chine, vers –200 avant J.-C. La seconde est l'œuvre du vingtième président des États-Unis, James Garfield.**



2. **La bissectrice de l'angle droit d'un triangle rectangle coupe le carré construit sur l'hypoténuse en deux moitiés (R. Eddy, 1991).**



3. **La moyenne géométriques de deux nombres *a* et *b*, soit $\sqrt{ab}$, est toujours inférieure à la moyenne arithmétique de ces deux nombres, *(a + b)/2*. Cette preuve est due à Charles D. Gallant (1977).**



4. **Une identité algébrique peut se voir. En voici un exemple dû à Shirley Wakin (1984).**

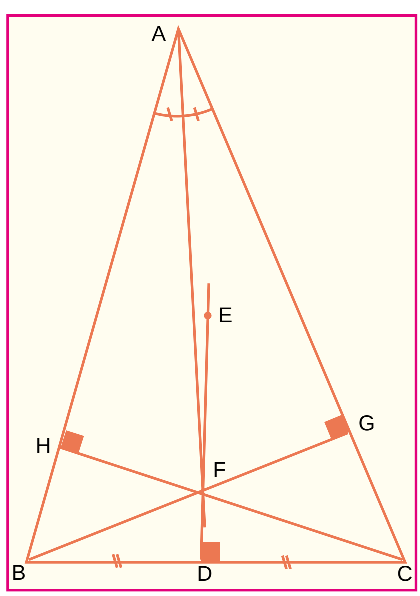
objets géométriques, ne doit pas s'appuyer sur ce qu'on voit : en mathématiques, méfions-nous des sens!

Plusieurs raisonnements géométriques apparemment irréprochables conduisent à des paradoxes. L'erreur provient le plus souvent de la figure dont on s'aide pour le raisonnement, qui est imperceptiblement trompeuse et nous conduit dans un piège. L'un de ces raisonnements établit que «tout triangle est isocèle» *(voir la figure 5)*. Il fut inventé par Lewis Carroll, qui le présenta dans son ouvrage *The Lewis Carroll Picture Book* (1899).

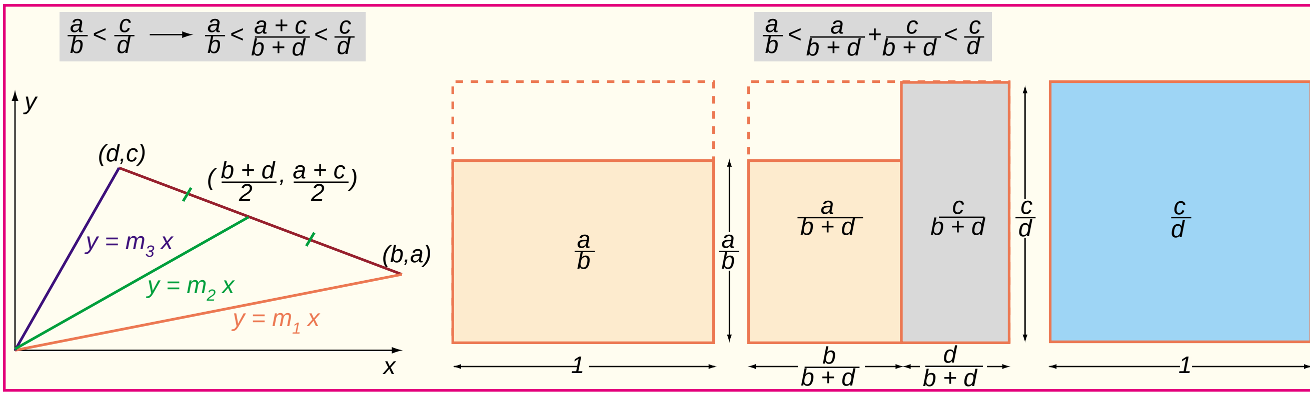
Après avoir constaté les ravages produits par la conception de la géométrie sans figure sur les jeunes esprits que cette forme d'intégrisme dégoûtait des mathématiques, on accepte plus facilement d'illustrer une démonstration par un dessin qui en facilite l'assimilation, même si l'on en connaît les risques.

Démonstrations par les figures

À l'exact opposé des démonstrations géométriques sans figure, un jeu étrange et subtil s'est développé aux États-Unis : celui des *démonstrations sans mots.* Encouragé par plusieurs revues mathématiques destinées aux enseignants, il a conduit à de remarquables preuves sans un seul mot, qu'un livre de Roger Nelsen a collectées et que nous recommandons à tous ceux que les dessins de cet article auront stimulés (le livre est en anglais, mais, vu son objet, même s'il était en moldave méridional ou en malais primitif, je n'hésiterais pas à le conseiller).



5. **ABC est un triangle quelconque. Traçons la perpendiculaire au milieu D de BC, soit E un point de cette perpendiculaire. Considérons la bissectrice de l'angle A. Si DE et cette bissectrice ne se rencontrent pas, cette bissectrice est orthogonale à BC, et donc le triangle est isocèle. Si DE et cette bissectrice se rencontrent en un point F, traçons FB et FC, puis la perpendiculaire FH à AB passant par F, et enfin la perpendiculaire FG à AC passant par F. Les triangles AFG et AFH sont égaux, car ils ont un côté commun et deux angles égaux. Donc AH=AG et FH=FG. Les triangles BDF et CDF sont aussi égaux (car BD=DC, DF commun et les angles en D égaux) et donc FB=FC. De même encore, les triangles FGC et FHB sont égaux (deux côtés et un angle égaux), donc HB=GC, et donc (en utilisant que HA=GA) on en déduit que AB=AC, c'est-à-dire que le triangle ABC est isocèle (l'erreur provient de ce que, si on construit F soigneusement, il se trouve toujours à l'extérieur du triangle ABC, ce qui interdit la suite du raisonnement).**



6. La règle des nombres moyens de Nicolas Chuquet datant de 1484. Deux preuves sans mots, la première *(à gauche)* de Li Changming (1988), la seconde *(à droite)* de Roger Nelsen (1993).

Le jeu des *démonstrations sans mots* consiste à concevoir des figures – accompagnées éventuellement de quelques équations – suffisamment bien conçues pour qu'en les regardant on se trouve persuadé de résultats mathématiques qui, sans la figure, ne sont pas évidents, ou même sont difficiles. Bien sûr, l'observateur doit connaître un minimum de résultats élémentaires : cas d'égalités des triangles, formule de la surface d'un carré, d'un triangle, d'un rectangle, etc.

Toutes les preuves sans mots ne sont néanmoins pas évidentes. Parfois il faut regarder et réfléchir longuement sur les figures pour comprendre pourquoi elles constituent une preuve du résultat annoncé. Parfois même on n'y arrivera pas : nul ne prétend que les mathématiques puissent être totalement évidentes. Le plaisir qu'on éprouve à saisir une démonstration graphique est si délicieux que l'on en redemande aussitôt. Les exemples de cette rubrique seront bien sûr insuffisants pour étancher votre soif. Ils nous serviront à réfléchir à ce qu'est une preuve mathématique.

Preuves parlantes et preuves muettes

Les exemples les plus simples de preuve sans mots concernent la formule :

$1 + 2 + 3 + ... + n = n\,(n + 1)/2$

La figure 1*a* en indique une qui était connue dans la Grèce antique.

Pourtant, si on voulait écrire une «démonstration complète et rigoureuse», au sens que donne à cette expression un mathématicien contemporain, il faudrait utiliser un raisonnement par récurrence.

La formule est vraie pour $n = 0$. Supposons qu'elle est vraie pour m et étudions le cas $m + 1$:

$1+2+...+m+(m+1)=m(m+1)/2+(m+1)$,

(par utilisation de l'hypothèse que la formule est vraie pour m)

$=(m+1)(m/2+1)$

(en factorisant $(m + 1)$)

$= (m + 1)(m + 2)/2$,

(en réduisant au même dénominateur la seconde parenthèse).

L'égalité obtenue en prenant le premier et le dernier éléments de cette suite d'égalités est la formule cherchée pour $m + 1$. Donc la formule est vraie pour tout entier.

Le principe du *raisonnement par récurrence* est : «Si une propriété P est vraie pour 0, et que l'on a l'implication [{P vrai pour m} entraîne {P vrai pour $m + 1$}], alors P est vraie pour tout entier.»

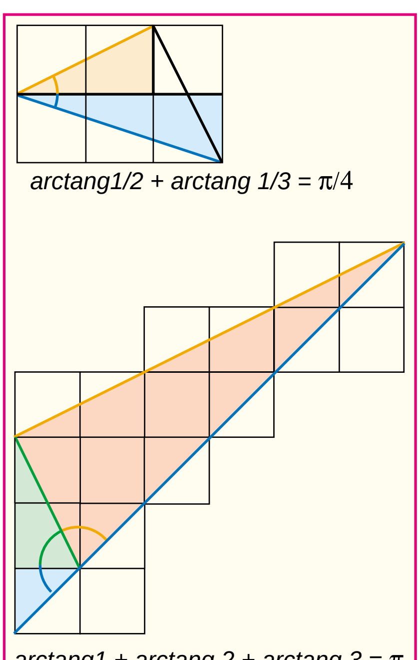
La démonstration rigoureuse est plus longue et surtout moins claire. La démonstration visuelle nous donne le sentiment de mieux saisir ce qui se passe. Le raisonnement par récurrence laisse sur sa faim : il *démontre* le résultat, il ne le *montre* pas.

Ne rêvons pas trop

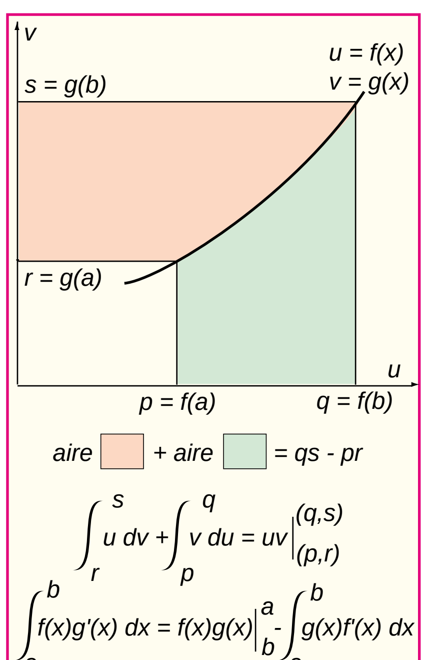
Il serait cependant trop simple de condamner le raisonnement par récurrence et les preuves habituelles des mathématiciens. Même si l'on éprouve une joie intense à observer et à réfléchir sur des *preuves sans mots*, il faut défendre les *preuves avec mots* et, pour commencer, la preuve par récurrence présentée au-dessus.

Son premier avantage est que, pour une multitude de formules analogues, elle marche mécaniquement. On savait, avant de commencer à l'écrire, qu'on allait aboutir, et l'on sait qu'on pourrait par la même méthode démontrer que $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = 1/3\,n(n + 1)(n + 1/2)$. Il ne semble pas que la magnifique démonstration sans mots de Man-Keung Siu *(voir la figure 1a)* puisse être produite automatiquement.

Un second avantage des preuves avec mots est qu'elles peuvent être défi-



7. Deux formules d'arctangentes. La première démonstration est très classique, la seconde est due à Edward Harris (1987).



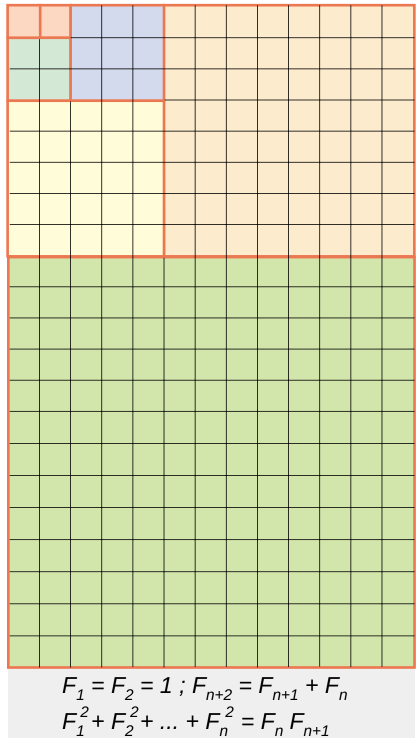
8. Démonstration sans mots de l'intégration par parties due au mathématicien américain Richard Courant (1937).

nies avec une précision parfaite : on parle alors de *preuve formelle.* Lorsqu'une preuve formelle détaillée est écrite, plus aucune intelligence n'est nécessaire pour la comprendre et en vérifier l'exactitude ; il suffit d'en suivre les différents pas en contrôlant que chacun est autorisé, car conforme aux règles exhaustivement fixées au départ. Un mathématicien qui détaille suffisamment une démonstration est certain d'être compris de ses collègues.

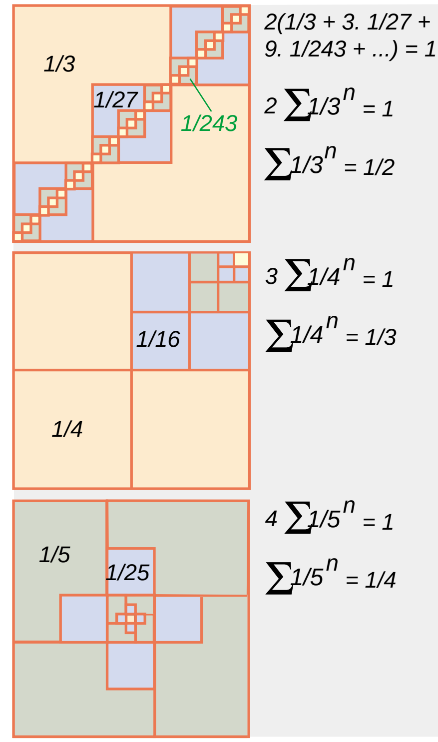
On pourrait critiquer ces prétendus avantages des preuves formelles de deux façons. D'une part, on sait qu'aucune notion absolue de preuve ne peut être définie (c'est le sens profond des théorèmes de limitation en logique) ; d'autre part, il n'est pas vrai que tout mathématicien comprend facilement les preuves avec les mots que ses collègues écrivent.

À la première critique, il faut répondre que, même si aucune notion de preuve formelle ne peut convenir simultanément à tous les domaines des mathématiques, certaines notions, comme celles utilisées par Bourbaki (le premier livre du *Bourbaki* est consacré à la définition de la notion de preuve formelle sur laquelle s'appuient tous les autres livres), conviennent pour 99,9 pour cent des mathématiques. De plus, pour chaque partie des mathématiques qui échappe à cette notion formelle de preuve, on trouve une autre notion de preuve formelle qui convient. Contrairement à ce que certains philosophes naïfs croient, les développements de la logique moderne depuis un siècle n'ont pas rendu caduque la notion de *formalisation*, mais, au contraire, l'ont installée de manière définitive au cœur des mathématiques. Cela est si vrai d'ailleurs que, même les intuitionnistes (un courant de pensée en logique qui préconise d'adopter une attitude prudente vis-à-vis du traitement de l'infini), qui étaient rétifs à l'utilisation des systèmes formels de preuve, les ont acceptés. Même si l'on sait qu'aucun véhicule ne permettra jamais d'aller à la vitesse de la lumière, nous ne renonçons pas aux véhicules pour nous déplacer ; il en va de même pour les systèmes formels de preuves.

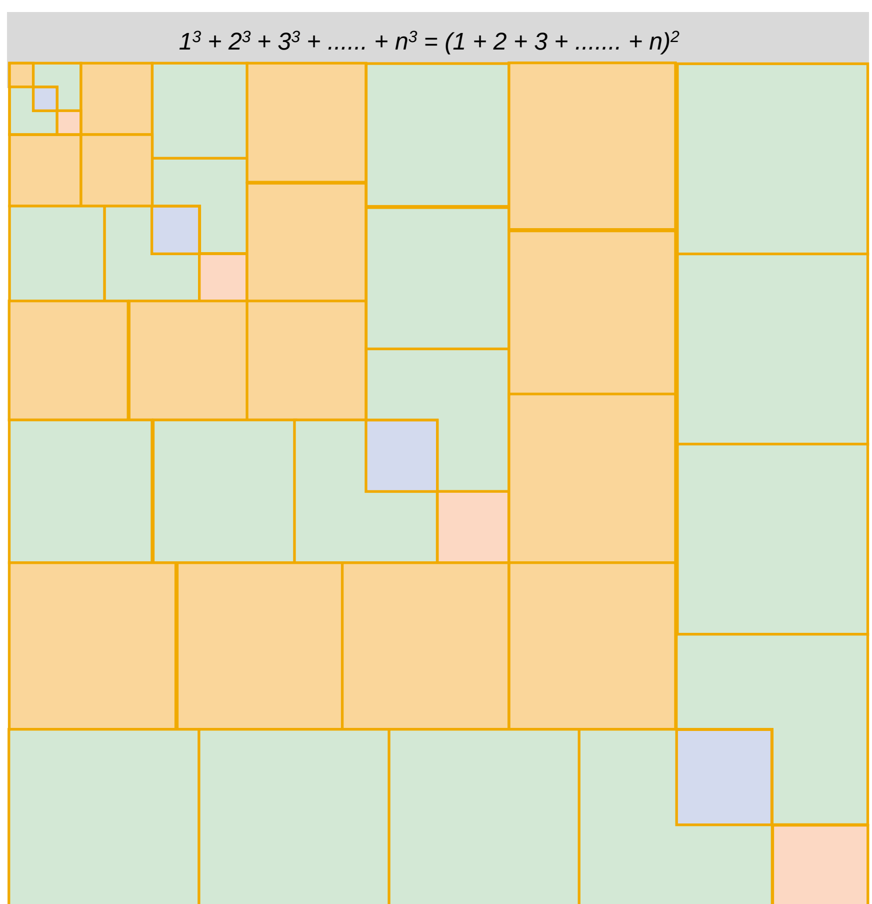
Pour répondre à la seconde critique : l'incapacité des mathématiciens à se comprendre entre eux, il suffit simplement de dire que c'est là une marque de la limitation des cerveaux humains, pas d'une limitation théorique. Personne aujourd'hui n'est en mesure de comprendre toutes les mathématiques qui sont écrites, comme personne n'est capable de lire tous les romans qui sont publiés. Reste qu'il est vrai que tout bon mathématicien à qui on présenterait une preuve élaborée par un collègue finirait, s'il en faisait l'effort, par la comprendre même si, dans certains cas,



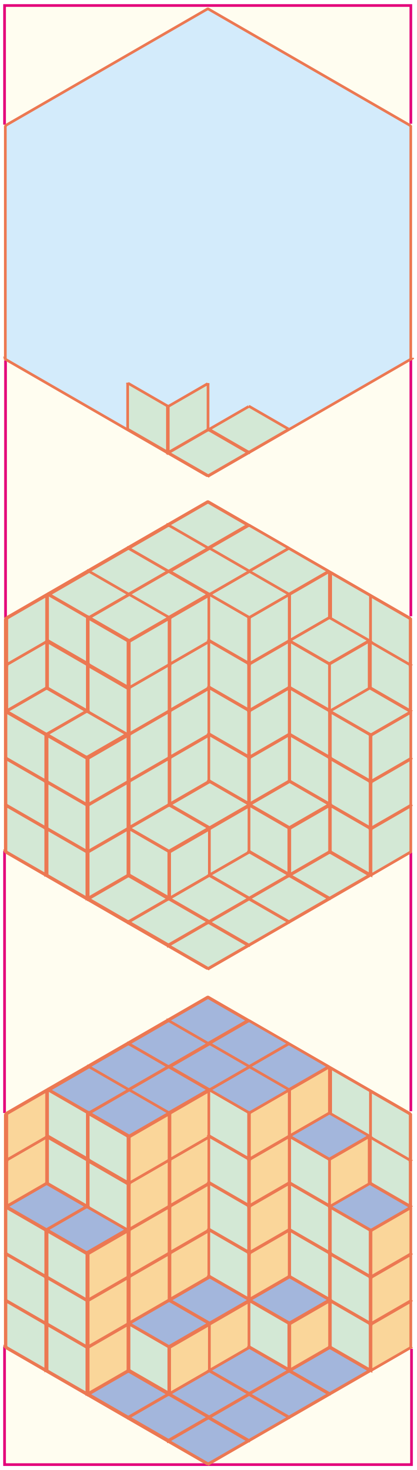
9. La somme des carrés des *n* premiers nombres de Fibonacci est égale au produit du *n*-ième par le *(n+1)*-ième. Démonstration due à A. Brousseau.



10. Quelques jolies séries sur la somme des inverses de 3^n, des inverses de 4^n, des inverses de 5^n. Ces preuves sont dues à Élisabeth Markham (1993).



11. La somme des cubes des *n* premiers entiers. La preuve sans mots a été proposée en 1984 par Solomon Colomb, le grand spécialiste des polyominos.



16. Le problème des calissons. Un calisson est un losange obtenu par accolement de deux triangles équilatéraux. Le *Théorème des calissons* stipule que, dans une boîte hexagonale dont le côté est *n*, lorsqu'on range des calissons de côté 1, il y en a un nombre identique, orientés dans chacune des trois directions possibles. Ici la preuve sans mots (proposée en 1989 par Guy David et Carlos Tomei) est fulgurante : notre vision tridimensionnelle fait tout le travail. N'arrivant pas à me persuader que le dessin constituait ici une véritable preuve du théorème des calissons, j'avoue que, pour me convaincre de son exactitude, je l'ai rétabli par une méthode différente.

cela nécessiterait un travail de plusieurs mois, ou même de plusieurs années.

Au total, les notions de preuves formelles tirées des preuves avec les mots sont bel et bien des outils puissants et généraux que les preuves sans mots ne détrôneront pas.

Le théorème des valeurs intermédiaires

Aussi amusantes qu'elles soient, les preuves sans mots atteignent vite leurs limites et ne doivent donc pas être prises trop au sérieux, comme l'exemple suivant le montre encore.

Le résultat d'analyse appelé *théorème des valeurs intermédiaires* nécessite une démonstration assez compliquée qui ne fut formulée qu'au XIXe siècle par le mathématicien tchèque Bolzano. En revanche, son sens est perçu sur une figure simple qu'on pourrait voir comme une démonstration sans mots.

Le théorème des valeurs intermédiaires affirme que, si f est une fonction continue (quand on en dessine la courbe il n'y a pas besoin de lever le crayon) définie entre deux valeurs a et b, alors pour toute valeur v entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un nombre c tel que $f(c) = v$. Graphiquement, cela signifie simplement que, pour tracer un trait sans lever le crayon d'un point sous la droite $y = v$ à un point au-dessus de la droite, vous devez la traverser.

Un dessin en constitue certainement une preuve visuelle, mais, contrairement à la preuve donnée par les mathématiciens aujourd'hui, elle ne fait pas réfléchir à la structure des nombres réels et, en fait, ne montre rien !

La preuve visuelle du théorème des valeurs intermédiaires est trop évidente, et c'est cela sa faiblesse ! En cherchant à comprendre cette évidence, les mathématiciens ont été amenés à approfondir la notion de continuité, puis la structure de l'ensemble des nombres réels, puis finalement tout un domaine mathématique qui constitue la puissante analyse contemporaine sans laquelle bien des questions de physique resteraient énigmatiques. L'évidence graphique est parfois dangereuse : elle incite à la paresse ; c'est en la refusant ou en essayant de la traduire sous une autre forme qu'avance notre compréhension.

Tout ne peut pas se démontrer visuellement

L'habitude que nous avons de vivre dans un espace à trois dimensions et la bonne adaptation de notre cerveau à cette situation nous dotent d'une intuition géométrique qu'il faut utiliser pour faire aimer les mathématiques aux enfants. Cependant notre situation d'objet physique dans un espace physique particulier a aussi ses inconvénients : nous n'arrivons pas à percevoir très clairement ce qu'est une sphère à quatre dimensions ou un espace à une infinité de dimensions, comme les physiciens en ont besoin aujourd'hui. Seule l'approche non géométrique des démonstrations nous conduit dans ces mondes mathématiques.

C'est sans doute à cause de tout cela que la grande époque de la géométrie est passée et qu'en tout cas il serait absurde de remplacer la notion classique de preuve avec des mots par une notion purement géométrique. Même si finalement cela nous désole, le point de vue formaliste (accepter de définir avec précision ce qu'est une preuve avec des mots et tout y ramener) est bien le meilleur et le plus puissant. Tout en lui restant fidèle dans les travaux les plus avancés, il faut refuser de se laisser obnubiler par lui, et il ne faut jamais perdre de vue qu'il n'est que l'aboutissement d'une longue maturation. Les élèves doivent parcourir un chemin dans lequel les preuves sans mots ont un rôle important à jouer, et l'on doit suggérer aux pédagogues de s'y intéresser en France, comme ils l'ont fait aux États-Unis : les preuves sans mots, en ancrant les mathématiques dans un réel immédiat, les rendent sympathiques, font ressentir que ce qu'elles disent est concret et permettent de plus de mémoriser sans mal des résultats à l'aspect rébarbatif.

Jean-Paul DELAHAYE est directeur adjoint du Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille du CNRS.

e-mail : delahaye@lifl.fr

N. BOURBAKI, *Éléments de mathématique. Algèbre I* (chapitres 1 à 3), Hermann, Paris, 1970.

Roger B. NELSEN, *Proofs Without Words : Exercices in Visual Thinking,* Classroom Resource Materials, n° 1, The American Mathematical Association of America, MAA Service Center, Washington DC, 1993.

H. EVES, *An Introduction to the History of Mathematics,* Sixth Edition, Saunders College Publishing, New York, 1992.

M. GARDNER, *Wheels, Life and other Mathematical Amusements*, W.H. Freeman and Company, New York, 1983, chapitre 6, *Geometrical Fallacies.*

B. d'AMORE, *Paradoxes en géométrie,* Plot n° 58, 1er trimestre 1992, Association régionale de l'APMEP (Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public), Université d'Orléans, pp. 13-18.