

Mathématiques expérimentales

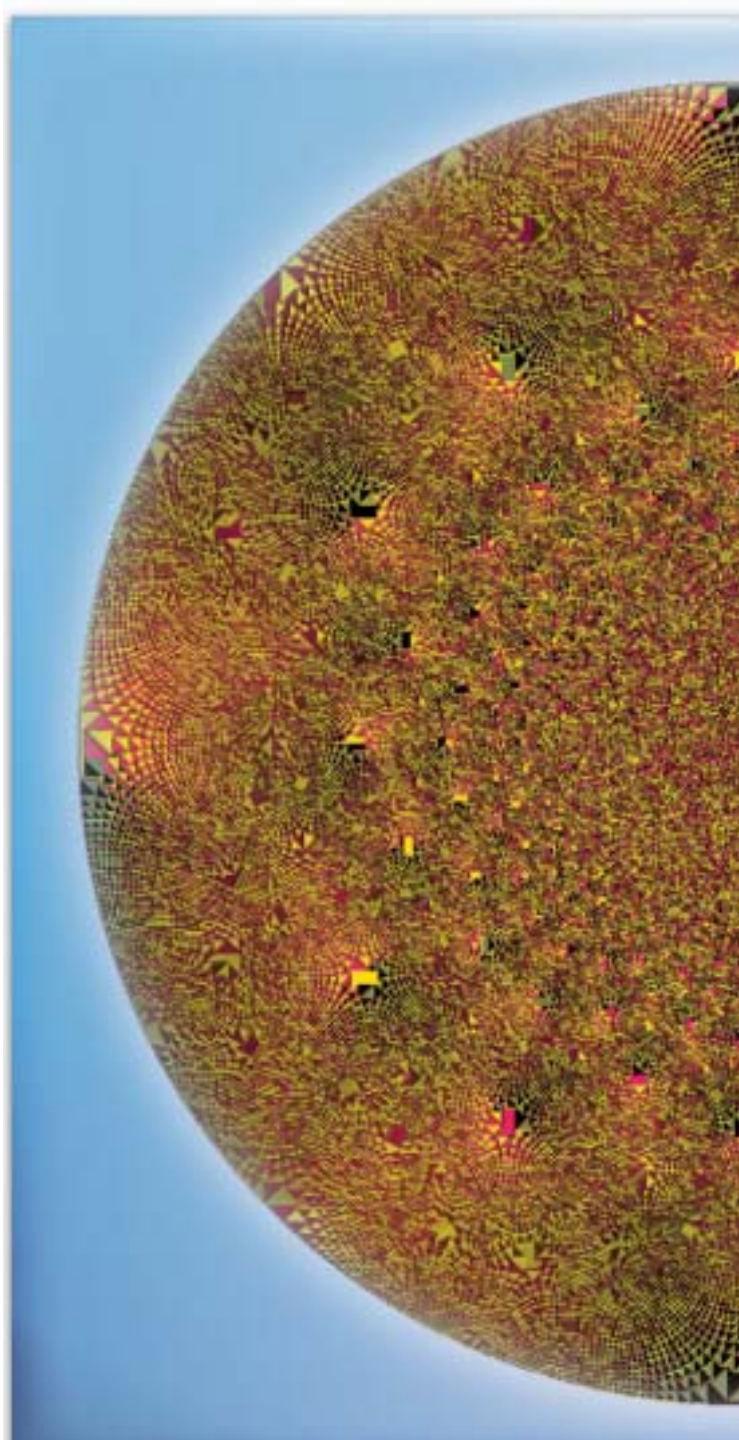
Certains mathématiciens défendent l'idée que les mathématiques sont une science expérimentale : l'ordinateur, dont la puissance de calcul suggère des conjectures, est pour eux un instrument idéal.

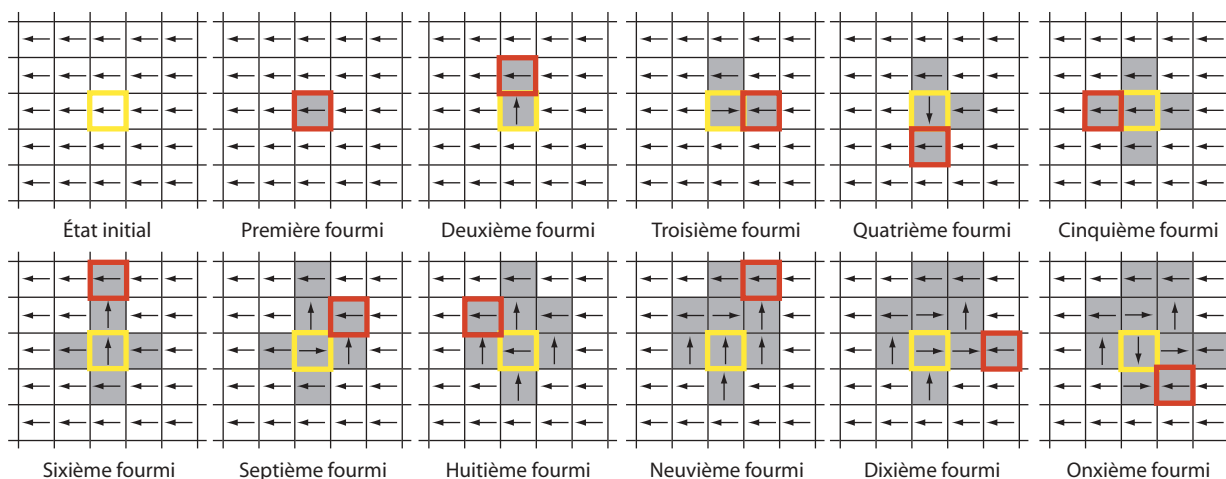
La statue du portail royal de la Cathédrale de Chartres où Euclide tient des instruments en main est représentative de la vision des artistes et artisans au Moyen Âge : le mathématicien élabore son savoir en utilisant des outils, c'est-à-dire en tenant compte du monde réel. Pourtant la majorité des philosophes soutiennent que les mathématiques sont une science à part où la démonstration dispense de l'examen des faits. Les mathématiciens eux-mêmes se satisfont de cette conception singulière qui leur permet de chercher seuls le plus souvent – c'est en mathématiques que le nombre moyen de signatures par article est le plus bas – sans instruments coûteux, lesquels amènent le travail en équipe et exigent d'incessants combats auprès des autorités de financements de la recherche.

Noter ce que l'on voit

Prenant le contre-pied de l'idée que les mathématiciens n'ont pas à se confronter aux faits, plusieurs philosophes et mathématiciens ont insisté sur les aspects expérimentaux et inductifs de l'activité mathématique et sur certaines similitudes entre le travail du physicien et celui du mathématicien.

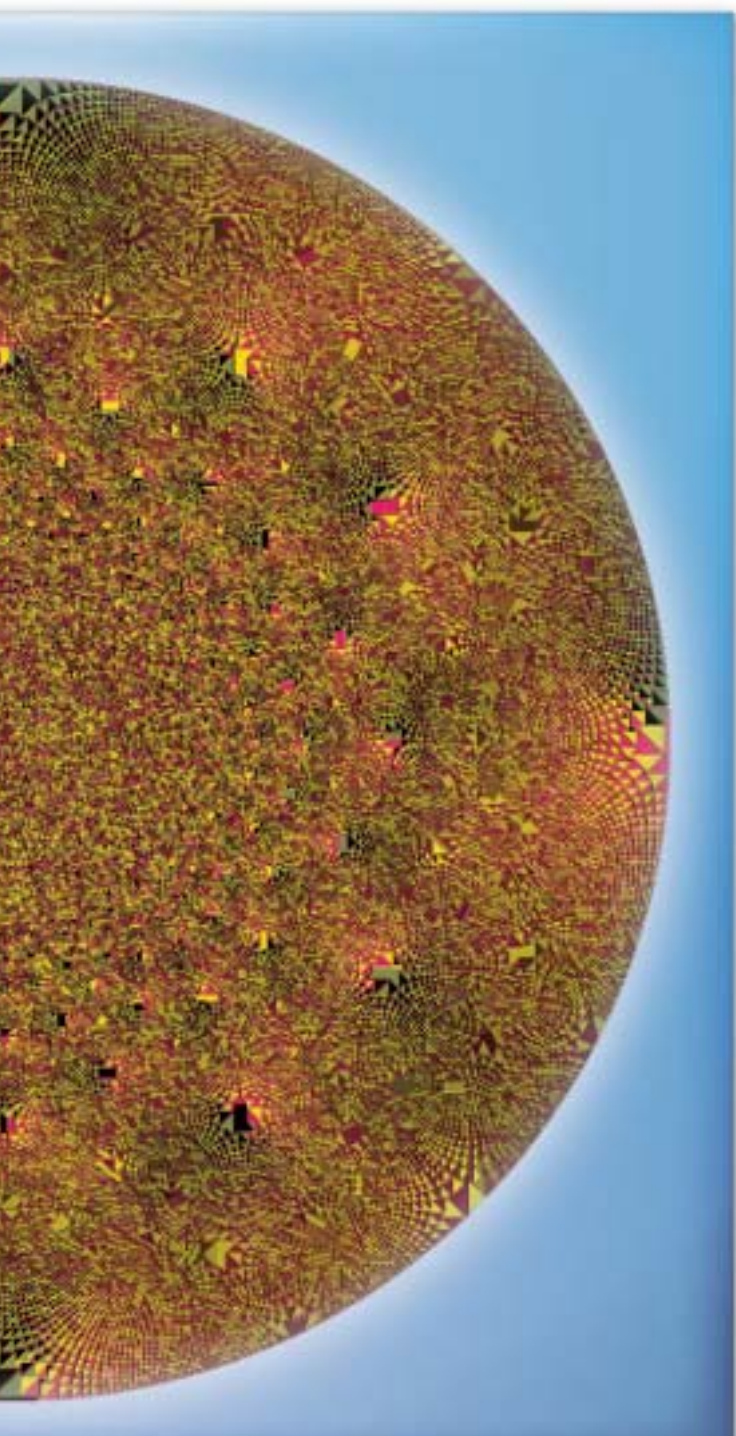
Carl Friedrich Gauss expliquait qu'il atteignait la vérité mathématique par l'expérimentation systématique et c'est d'ailleurs de cette façon qu'il découvrit que le nombre de nombres premiers inférieurs à n est approximativement $n/\log(n)$, affirmation qui ne fut prouvée qu'un siècle plus tard. Le logicien Kurt Gödel, cohérent avec ses positions réalistes – il croyait que les objets mathématiques ont une existence réelle, indépendante de nous –, remarquait que « si les mathématiques décrivent un monde objectif, comme le fait la physique, il n'y a aucune raison pour que la méthode inductive ne puisse être appliquée en mathématiques comme elle l'est en physique ». Gödel pense qu'une induction analogue à celle des sciences empiriques amène la découverte de nouveaux axiomes et le choix entre systèmes d'axiomes concurrents, opérations qui, bien sûr, ne peuvent résulter des raisonnements déductifs puisque ces axiomes sont à la base des déductions.





1. Un cercle inattendu et inexpliqué : la ronde des fourmis. Considérons l'algorithme suivant pour disposer des fourmis sur un plan divisé en cases carrées, chacune munie d'une flèche pivotante indiquant le Nord, l'Est, l'Ouest, ou le Sud. Au départ, toutes les flèches sont tournées vers l'Ouest. Des fourmis sont déposées les unes après les autres en un même point – le centre, case jaune – et se déplacent sur le damier infini de la manière suivante. Si la fourmi arrive sur une

case inoccupée, elle s'y installe et y reste définitivement. Lors de sa recherche d'une position stable, à chaque fois qu'elle arrive sur une case occupée, la fourmi fait tourner la flèche de cette case d'un quart de tour dans le sens des aiguilles d'une montre et se déplace vers la case maintenant pointée par la flèche. La forme circulaire (ci dessous) de la zone occupée par trois millions de fourmis est une grande surprise. La zone extérieure bleutée correspond aux cases non occupées.



Dans l'esprit de certains chercheurs, l'idée de faits et d'expérimentations mathématiques va au-delà de l'extrapolation immédiate, surtout depuis que l'ordinateur s'est ajouté à la feuille, au crayon et aux instruments de tracé géométrique, longtemps les seuls outils des mathématiciens. Créé en 1992, le journal électronique gratuit *Experimental Mathematics* (www.expmath.org) traite de cette partie des mathématiques où l'ordinateur donne accès à une multitude d'informations qu'un mathématicien ne peut élaborer et maîtriser seul. Des livres récents sont aussi consacrés à cette façon nouvelle de pratiquer la recherche mathématique avec un ordinateur comme outil (voir la bibliographie à la fin de l'article). Toute cette activité illustre les remarques étonnantes que le mathématicien Godfrey Hardy formula en 1928 à une époque où l'ordinateur n'était pas encore entré dans le jeu. Hardy expliquait :

« J'ai toujours considéré qu'un mathématicien était en premier lieu un observateur, un homme qui, situé assez loin de paysages montagneux, décrit ce qu'il y voit. [...] L'analogie est un peu brutale, mais je suis certain qu'elle n'est pas trompeuse. En la poussant à son extrême, nous arrivons à la conclusion plutôt paradoxale que nous pouvons, en dernière analyse, nous contenter de noter ce que nous observons ; que les démonstrations sont ce que, Littlewood et moi, appelons du vent, des effets rhétoriques destinés à frapper les esprits, des images sur un tableau lors d'une conférence, des trucs pour stimuler l'imagination des étudiants. La vérité n'est pas exactement ainsi, mais ne s'en écarte pas beaucoup. L'image donne une idée de ce que sont, à la fois, la pédagogie mathématique et la découverte mathématique. Il n'y a que les personnes étrangères aux sciences et mal informées qui imaginent que les mathématiciens font des découvertes en tournant la manivelle d'une machine miraculeuse. »

Jon Borwein, David Bailey et Roland Girgensohn défendent l'idée que la plus grande certitude mathématique n'est pas nécessairement atteinte par les démonstrations habituelles :

« Bien des résultats de calculs informatiques sont aussi fiables, voire plus, que certaines parties des mathématiques humaines. Par exemple, il est vraisemblable que seules 50 ou 100 personnes vivantes peuvent, en s'en donnant le temps, assimiler la totalité de la démonstration extraordinairement

a $\int_0^{\infty} \cos(2x) \prod_{n=0}^{\infty} \cos(x/n) dx =$
0,39269908169872415480783042290993786052464543418723
 $\frac{\pi}{8} =$
0,39269908169872415480783042290993786052464617492189

b $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$
 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin(x/3)}{x/3} dx = \frac{\pi}{2}$
 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin(x/3)}{x/3} \cdot \frac{\sin(x/5)}{x/5} dx = \frac{\pi}{2}$
 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin(x/3)}{x/3} \cdot \frac{\sin(x/5)}{x/5} \dots \frac{\sin(x/13)}{x/13} dx = \frac{\pi}{2}$
.....
Mais, attention à la généralisation hâtive, car :
 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin(x/3)}{x/3} \cdot \frac{\sin(x/5)}{x/5} \dots \frac{\sin(x/15)}{x/15} dx =$
 $\frac{467807924713440738696537864469}{935615849440640907310521750000} \pi$

2. Coïncidences trompeuses. Le fait qu'une coïncidence se produise n'implique pas systématiquement une loi et même les défenseurs les plus acharnés des mathématiques expérimentales n'ont jamais envisagé de se passer des démonstrations. Ils s'amuse même à repérer des pièges que nous tend le monde mathématique. (a) Deux nombres réels peuvent avoir leurs 41 premières décimales en commun et pourtant être différents. (b) Une régularité, même vérifiée 7 fois de suite, peut brusquement cesser de l'être !

complexe qu'Andrew Wiles a formulée du *Grand Théorème de Fermat*. S'il y a, ne serait-ce qu'une chance sur cent, pour que chacune ait laissé passer la même erreur subtile – et on imagine que cela est possible à cause des nombreux résultats antérieurs sur lesquels la preuve s'appuie –, alors bien des résultats de calculs informatiques sont mieux garantis que la démonstration du Grand Théorème de Fermat. »

Les mathématiques, pour ces tenants de l'ordinateur, n'ont pas pour but de découvrir des preuves formelles, mais des connaissances sûres ; pour eux la machine est susceptible de nous y aider de multiples façons et son importance augmente à mesure que matériels et logiciels se perfectionnent.

L'ordinateur pour apprendre et s'entraîner

Tout d'abord l'ordinateur enrichit l'intuition en créant une familiarité avec des objets et situations irréalisables matériellement. C'est la fonction didactique de l'expérimentation qu'élèves, étudiants et chercheurs mettront à profit.

Manipuler des billes aide à se construire une image précise du monde des nombres entiers ; réaliser des découpages en carton donne une compréhension affinée de ce que sont les longueurs, les aires, les polyèdres, etc. De même, les simulations massives de tirages au hasard qu'on peut effectuer avec un ordinateur sont un bon moyen de développer son sens des probabilités. À l'Université de Lille, un cours de mathématiques expérimentales propose ainsi aux étudiants de tester différentes martingales au jeu de la roulette. Le

Principe du Jeu hardi affirme : « La méthode la plus efficace de jeu pour passer de A euros à B euros en jouant sur pair ou impair à la roulette s'obtient en misant toujours – par exemple sur pair – la somme maximum possible, sans dépasser toutefois le but visé. » Par exemple, pour passer de 100 euros à 1 000 euros : misez 100 si vous avez 100, misez 300 si vous avez 300, misez 400 si vous avez 600, etc., puis recommencez selon le même principe si nécessaire. Si la démonstration de ce principe, par Dubbins et Savage en 1956, est très difficile, il est facile de le mettre à l'épreuve : il suffit d'essayer toutes sortes de stratégies de jeu non conformes au *Principe du Jeu hardi* et de mesurer leur efficacité par simulation répétée, en comparant au résultat donné par le *Jeu hardi*. La loi difficile devient petit à petit naturelle pour celui qui réalise ces simulations, car au cours des tentatives, il comprend la raison profonde de la loi : puisque les tirages élémentaires sont défavorables au joueur, l'intérêt de celui-ci est de miser le moins d'argent possible et d'aller droit au but.

Cette idée d'expérimentation n'est pas nouvelle et adapte au présent la proposition de créer des Laboratoires de Mathématiques, idée défendue par Émile Borel en 1904, soutenue depuis par Jean Dieudonné à propos de l'enseignement de la géométrie et reprise par les enseignants travaillant à la rénovation de l'enseignement des mathématiques en France au sein d'une commission coordonnée par J.-P. Kahane.

Un second type d'expérimentations mathématiques est celui où l'on demande à l'ordinateur de produire un grand nombre de faits mathématiques qu'on analyse jusqu'à y découvrir des régularités, qu'il sera peut-être possible de démontrer. C'est ainsi qu'un ami mathématicien a redécouvert, il y a quelques années, par l'expérimentation informatique, la stratégie assurant de gagner au *Jeu de Marienbad* et le théorème général concernant les généralisations de ce jeu. Ce jeu est pratiqué par les personnages du film d'Alain Resnais, *L'année dernière à Marienbad*, tourné en 1961 (voir la figure 3). À l'aide de programmes, mon ami a fait analyser à l'ordinateur les configurations conduisant inévitablement à la perte. Avec ces faits mathématiques, il a repéré que les configurations perdantes possédaient une forme commune, ce qui lui a permis de démontrer un résultat général s'appliquant au *Jeu de Marienbad*...

Le repérage informatique de régularités dans des faits mathématiques énumérés par la machine admet un cas particulier qui a pris de l'importance ces dernières années : la recherche de nouvelles formules par examen des chiffres décimaux. La technique consiste à calculer avec une précision de plusieurs dizaines de chiffres diverses formules et à comparer les résultats obtenus. Lorsque les résultats de deux formules coïncident, on essaie de démontrer l'égalité repérée. En pratique pour mener très rapidement de nombreuses comparaisons, des algorithmes spéciaux ont été élaborés, mais le principe reste celui d'une recherche de coïncidence par le calcul d'un grand nombre de décimales. La plus fameuse découverte obtenue par cette méthode a été celle, que firent Simon Plouffe, Jon Borwein et David Bailey en 1995, de la formule suivante :

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right)$$

Cette nouvelle formule pour le nombre π permet d'en calculer les chiffres binaires indépendamment, par exemple calculer le milliardième chiffre binaire de π sans calculer les précédents (ce qui est, vous l'avouerez, extraordinaire). Notons bien que la nouvelle formule, après son identification, a été prouvée rigoureusement par une démonstration traditionnelle. Faire travailler l'ordinateur et généraliser sans prendre la peine de démontrer pourraient se révéler catastrophiques. Pour convaincre des dangers des généralisations ne s'appuyant pas sur des preuves rigoureuses, les défenseurs des mathématiques expérimentales recherchent des situations pièges et ils en ont trouvé, certaines tout à fait remarquables.

La figure 2 propose deux exemples de pièges tendus par le monde mathématique aux généralisateurs impétueux. Dans le premier, une intégrale possède une valeur numérique dont les 41 premières décimales coïncident avec les décimales de $\pi/8$, et qui pourtant ne vaut pas $\pi/8$. Dans le second exemple, une série de formules est valable pour tous les nombres impairs jusqu'à 13, et cesse de manière inopinée de l'être pour 15. Notons que ces exemples mettant en garde contre une conception trop naïve de l'expérimentation informatique ont été découverts... en utilisant des ordinateurs !

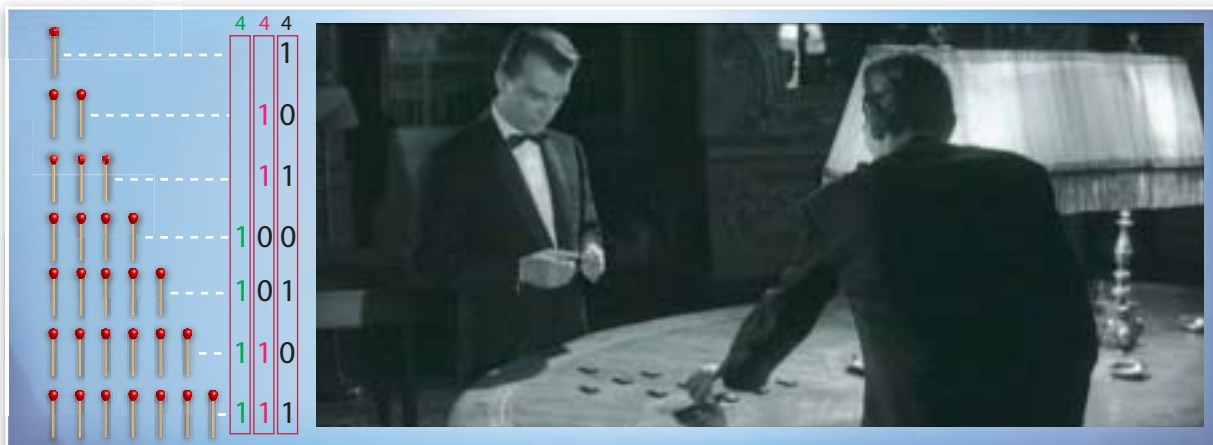
L'ordinateur est donc susceptible de produire de grandes quantités de faits. Cependant, alors que la stratégie gagnante du *Jeu de Marienbad* a été identifiée par le mathématicien seul examinant les faits bruts produits par l'ordinateur, il peut aussi lui demander d'aider à rechercher une loi, par exemple en engendrant des courbes à partir des données ou en calculant des moyennes ou des fréquences, etc. Les régularités repérées automatiquement deviendront soit des théorèmes si l'on réussit à les démontrer, ou resteront des conjectures si l'on n'y parvient pas.

C'est ainsi qu'en calculant avec l'aide de programmes les décimales des nombres π , e , $\sqrt{2}$ et de bien d'autres, et en examinant – toujours avec l'ordinateur – leur répartition, on a été amené à formuler la conjecture (en attente de démonstration) que ces nombres sont normaux : chaque décimale se présente avec la fréquence 1/10, chaque série de 2 chiffres (par exemple 37) avec la fréquence 1/100, etc.

Dans le même ordre d'idée, en observant sur un diagramme en échelle logarithmique qu'il y a très régulièrement 6 exposants de nombre de Mersenne (ce sont les nombres premiers de la forme $2^n - 1$) entre 10^n et 10^{n+1} pour $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, on est conduit à énoncer la double conjecture : (a) il y a une infinité de nombres premiers de Mersenne et (b) que le n -ième a un exposant dont l'ordre de grandeur est $10^{n/6}$. Aucune de ces deux conjectures n'a été démontrée aujourd'hui.

L'énigme du Rotor router

Un autre exemple de l'utilisation de l'ordinateur pour faire apparaître des conjectures est tout récent et profondément surprenant. Il s'agit de la conjecture du *Rotor router* formulée par Jim Propp et découverte en demandant à un ordinateur d'exécuter un algorithme de remplissage des cases du plan suivi de l'affichage graphique du résultat. Les cases carrées d'un damier infini sont noircies selon une règle déterministe simple (voir la figure 1). Dans toutes les situations analogues (par exemple rencontrées au cours de l'étude des réseaux cellulaires d'automates finis), les règles produisent des configurations anisotropes (comme l'est le support) où l'horizontale, la verticale, les obliques à 45 degrés jouent des rôles privilégiés. Dans le cas du *Rotor router* un cercle aussi parfait que possible se dessine comme par magie. Cet exemple tout récent suscite beaucoup de curiosité et bien qu'une thèse de mathématiques de l'Université de Berkeley en Californie ait déjà été soutenue



3. Dans le Jeu de Marienbad, chaque adversaire prend tour à tour le nombre qu'il veut d'allumettes, mais dans une rangée seulement. Celui qui prend la dernière allumette a gagné. Il est des configurations perdantes qu'il faut éviter (par exemple celle où il y a deux allumettes, chacune dans une rangée) et où il faut placer l'adversaire : ce sont celles où, quand on a transcrit en base 2, les nombres d'allumettes de chaque rangée, il y a, au total, un nombre pair de 1 utilisés pour les chiffres des unités, un nombre pair de 1 utilisés pour les chiffres des « deusaines », etc. Ces configurations sont dites « paires ». Par exemple 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 en base 2 s'écrit 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111 ; il s'agit d'une configuration

paire, car il y a 4 « 1 » comme dernier chiffre, 4 « 1 » comme avant-dernier chiffre, 4 « 1 » comme chiffres en troisième position : la configuration est donc perdante pour le premier à jouer. Le raisonnement prouvant que, lorsque votre adversaire est dans une configuration paire, vous êtes certain de pouvoir le faire perdre consiste à établir deux points. [a] À partir d'une configuration paire, vous en créez toujours une qui ne l'est pas. [b] Lorsque l'on doit jouer à partir d'une configuration qui n'est pas paire, on peut toujours s'arranger pour mettre l'adversaire dans une configuration paire. La stratégie gagnante consiste alors à toujours mettre son adversaire devant des configurations paires.

à son sujet, la rondeur miraculeuse détectée par l'ordinateur reste obstinément mystérieuse.

Karl Popper a défendu l'idée qu'une théorie a d'autant plus de contenu qu'il est facile de la mettre à l'épreuve et de démontrer qu'elle est fausse (théorie falsifiable). Pour falsifier des conjectures, rien de tel qu'un ordinateur et ici l'expérimentation mathématique ressemble d'assez près à l'expérimentation physique : on met la loi présumée à l'épreuve en essayant de la falsifier un très grand nombre de fois.

L'ordinateur falsificateur

L'énoncé du *Grand Théorème de Fermat* indique, par exemple, qu'il n'existe pas de quadruplets a, b, c, n avec a, b, c non nuls et n supérieur à 2, tels que : $a^n + b^n = c^n$. Un tel énoncé serait falsifié par n'importe quel quadruplet a, b, c, n satisfaisant les conditions citées. Le *Grand Théorème de Fermat* était donc infiniment falsifiable avant qu'il ne soit démontré par Andrew Wiles, il y a une dizaine d'années. Aujourd'hui encore certains mathématiciens recherchent des falsificateurs de ce théorème célèbre. Ces tentatives ne sont pas absurdes : l'échec de ces essais confirme indirectement que la démonstration de Wiles est juste.

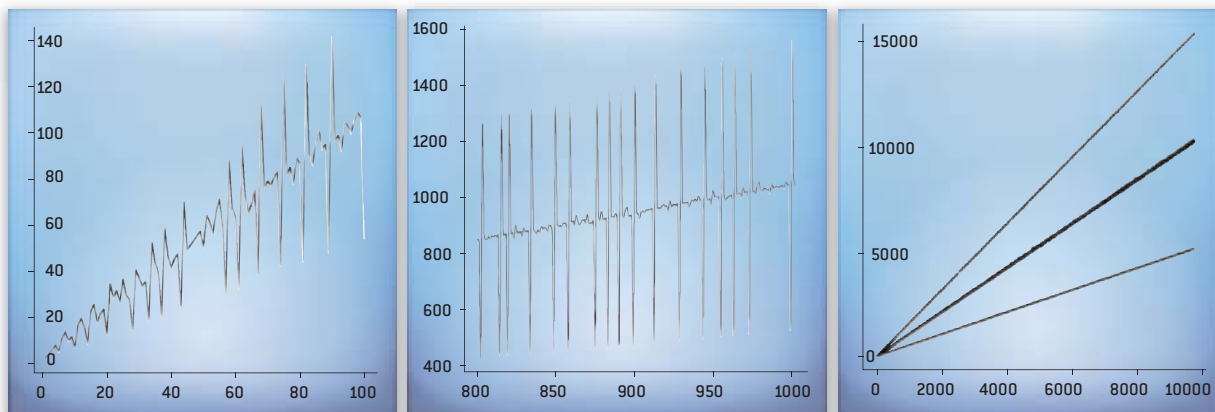
Diverses généralisations du théorème de Fermat ont été envisagées dont celle-ci, proposée par Leonhard Euler : une somme de moins de n puissances n -ièmes de nombres non nuls n'est jamais une puissance n -ième. Cette généralisation est fausse pour $n = 5$: en 1966, L. Lander et T. Parkin ont trouvé (en utilisant un ordinateur), que $27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5$. Pour $n = 4$, la généralisation

d'Euler du théorème de Fermat est aussi fausse et, en 1988, N. Elkies a démontré qu'il y avait une infinité de solutions (non multiples les unes des autres) dont la plus petite, trouvée par ordinateur par R. Fries de la *Thinking Machine Corporation*, est : $95800^4 + 217519^4 + 414560^4 = 422481^4$. Pour $n = 6$ et au-delà, la conjecture reste aujourd'hui non résolue. Si l'ordinateur n'a servi à rien dans la démonstration du *Grand Théorème de Fermat*, sa capacité à falsifier d'autres conjectures proches est cruciale ; sans lui, des mathématiciens chercheraient encore une démonstration de la généralisation d'Euler.

Le plus souvent les conjectures résistent et le travail de ceux qui tentent de les falsifier apparaît absurde : si la conjecture est vraie, ils ne trouveront jamais rien, quel que soit le soin ou le génie qu'ils auront mis dans leurs programmes.

On peut penser qu'il en est ainsi pour la conjecture de Syracuse dont la vérification progresse grâce à des programmes de plus en plus complexes et subtils. Cette conjecture affirme que la fonction $f(n) = n/2$ si n est pair, $f(n) = 3n+1$ si n est impair conduit toujours à 1 quand on l'applique de manière répétée à un entier n . Ainsi, pour n égal à 10, 10 est pair, on prend la moitié, 5, 5 est impair, on prend le triple et on ajoute 1, on trouve 16, 16 est pair, on prend la moitié, 8 qui est pair, on prend la moitié, 4, 4 est pair, on prend la moitié, 2 qui est pair et qui divisé par 2, donne 1. Cette conjecture a été vérifiée pour tous les entiers inférieurs à $3,5 \cdot 10^{17}$.

Récemment à propos de la plus ancienne conjecture mathématique, un progrès a été fait qui mérite d'être mentionné, car il constitue un bon exemple de ce que sont les interactions entre mathématiciens et ordinateurs.



4. La suite σ de l'« électrocardiogramme ». Découverte en 2001 par Jonathan Ayres, la suite de l'électrocardiogramme (ou EKG sequence) a été étudiée par J.-C. Lagarias, E.M. Rains et N. Sloane qui bien sûr l'a ajoutée à son célèbre dictionnaire de suites numériques (elle porte le numéro A064413). Elle est définie par $a(1)=1$, $a(2)=2$, et pour n au-delà par : $a(n) = \{\text{le plus petit entier non déjà présent dans la suite et ayant au moins un facteur commun avec } a(n-1)\}$. Son début est : 1, 2, 4, 6, 3, 9, 12, 8, 10, 5, 15, 18, 14, 7, 21, 24, etc. La suite semble très erratique et le premier usage de l'ordinateur est de dessiner son graphe pour voir à quoi elle ressemble. On comprend alors d'où elle tire son nom ! L'étude détaillée de cette suite s'avère difficile, car sa définition combine des aspects additifs et multiplicatifs des nombres entiers, combinaison délicate à maîtriser. L'interaction entre le mathématicien et l'ordinateur dans l'étude de cette suite est exemplaire du travail expérimental en mathématiques : elle alterne observations, calculs, conjectures, démonstrations (pas toujours dans cet ordre) et produit en définitive une série de connaissances nouvelles sur la suite. On suit cette interac-

tion dans l'article du journal *Experimental Mathematics* (www.expmath.org, vol. 11, n° 3, 2002). Un premier calcul et l'observation des graphiques produits par l'ordinateur suggèrent des propriétés : $a(n)$ prend toutes les valeurs entières une fois et une seule fois. Les mathématiciens démontrent rigoureusement ces propriétés. Ensuite une définition équivalente conduisant à un programme plus efficace de calcul est élaborée et permet d'obtenir un bien plus grand nombre de points de la suite, dont 10 millions de termes sont calculés par l'ordinateur. Ces nouveaux calculs permettent alors de formuler et de tester une série de conjectures : [1] À chaque fois qu'un nombre premier p apparaît dans la suite, son prédécesseur est $2p$ et son successeur est $3p$ (ces points donnent les pics de la courbe). [2] $a(n)$, sauf aux points exceptionnels de la forme p ou $3p$ (p premier), vaut approximativement $n + n/3 \log(n)$. Ces conjectures, sans doute hors de portée, et les données fournies par l'ordinateur suggèrent des encadrements : pour tout $n > 1$: $n/260 < a(n) < 14n$. Cet encadrement est démontré en utilisant, pour certaines parties de la démonstration, des résultats obtenus par l'ordinateur.

La conjecture la plus ancienne affirme qu'il n'existe aucun nombre parfait impair. Les nombres parfaits sont les nombres qui comme 6 ou 28 sont égaux à la somme de leurs diviseurs stricts : $6 = 1 + 2 + 3$; $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. On connaît aujourd'hui 42 nombres parfaits pairs (ce sont les nombres de la forme $2^{n-1}(2^n - 1)$, $2^n - 1$ étant un nombre de Mersenne premier), mais aucun nombre parfait impair. La recherche infructueuse de nombres parfaits impairs a suggéré aux mathématiciens qu'il n'en existe pas (c'est la conjecture). Depuis plus de deux millénaires que la question est posée les progrès consistent principalement en résultats du type : s'il existe un nombre parfait impair, il possède au moins K diviseurs, ou au moins P chiffres. Le dernier résultat record de ce type est dû à Kevin Hare, qui dans un article paru en 2003 établit que s'il existe des nombres parfaits impairs, ils possèdent au moins 47 facteurs dans leur décomposition en facteurs premiers. Associé à d'autres résultats, on en déduit que si un nombre parfait est impair il possède au moins 35 chiffres. Tout cela a été établi en utilisant des ordinateurs, mais pas d'une manière naïve en faisant défiler les nombres impairs et en s'assurant qu'aucun n'est égal à la somme de ses diviseurs propres (une telle méthode, dite exhaustive, ne pourrait même pas faire défiler tous les nombres de moins de 20 chiffres).

Subtiles coopérations

La méthode utilisée par K. Hare associe des raisonnements arithmétiques, conduisant à des lemmes, qui permettent de découper le problème en 2 539 cas qu'on traite alors soigneusement (parfois en utilisant un ordinateur auquel on confie le travail de factorisation d'un entier). Le tout amène la conclusion par un raisonnement par l'absurde, lequel serait d'une taille colossale si on en écrivait toutes les étapes. Même lorsqu'il s'agit de tester des conjectures, le mathématicien expérimentateur doit faire preuve d'intelligence, et c'est en entremêlant raisonnements habituels et calculs confiés à la machine qu'il avance (voir la figure 4 où l'étude de la suite de l'électrocardiogramme illustre l'association complexe du calcul confié à l'ordinateur et du raisonnement classique).

Notons encore que, dans l'exemple précédent, les calculs pour obtenir les factorisations nécessaires aux raisonnements s'appuient sur des algorithmes résultant de longues mises au point et fondés eux-mêmes sur des théorèmes parfois difficiles ayant demandé des calculs informatiques pour leur mise au point.

Dans les mathématiques expérimentales, l'ordinateur peut n'être qu'un simple exécuter de corvées, dont les résultats aident, de l'intérieur, à l'élaboration d'une preuve. Deux cas sont célèbres : la démonstration du théorème des quatre couleurs en 1976 (toute carte peut être coloriée avec quatre couleurs sans que deux pays voisins portent la même couleur) et de la conjecture de Kepler démontrée en 1998 (l'empilement le plus serré que l'on puisse obtenir de sphères dans l'espace est celui utilisé pour faire les piles de boulets de canon ou les tas d'oranges). La validité de la démonstration de la conjecture de Kepler est toujours discutée tant est complexe le schéma général de la preuve entremêlant calculs réalisés par ordinateur et raisonnements classiques.

Un bon assistant comme l'ordinateur ne sert pas seulement à exécuter docilement des corvées simples qu'on pourrait faire soi-même à la main si on était près à y consacrer des années ou des siècles, il sera d'autant plus précieux qu'on pourra lui demander des tâches subtiles. Grâce aux logiciels de calcul formel et de démonstration automatique, il n'est pas rare aujourd'hui qu'une partie délicate de démonstration ou un morceau difficile de calcul soient confiés à l'ordinateur.

On voit donc fréquemment des recherches où l'ordinateur intervient en fournissant son aide au moment de la découverte des nouveaux énoncés, étape suivie par une aide à la mise au point des démonstrations et éventuellement à leur contrôle (sans parler de l'aide qu'apporte l'ordinateur pour éditer les textes mathématiques, les imprimer et les faire circuler entre chercheurs). Cet usage multiple où il est parfois impossible de savoir qui fait précisément quoi est maintenant courant et la revue en ligne *Experimental Mathematics* contient de nombreux articles décrivant de telles collaborations.

L'ordinateur pour se rassurer

Un usage nouveau de l'ordinateur semble en vue, à cause justement de la complexité des preuves que l'interaction entre ordinateurs et mathématiciens engendre. La démonstration que Thomas Hales a mise au point de la conjecture de Kepler et dont certaines parties font intervenir des calculs informatiques a été publiée avec une mise en garde du comité d'experts chargé d'en fournir la garantie : elle indique qu'il ne pouvait affirmer qu'aucune erreur n'était restée. Pour lever cette incertitude, Thomas Hales a entrepris de produire une version formalisée de sa démonstration, version dont chaque pas est explicite et contrôlé mécaniquement. Bien sûr le travail de mise au point de la version formalisée se fait en s'aidant d'ordinateurs, et une fois que ce travail sera effectué, ce sera encore un ordinateur qui sera chargé du contrôle final de la justesse de chaque pas de la preuve formalisée.

Alors que de nombreuses preuves classiques, dont tout récemment celle du théorème des quatre couleurs, ont déjà été validées par la méthode de la vérification formelle, pour le théorème de Hales sur la conjecture de Kepler, ce travail demandera sans doute plusieurs années. Cet usage des ordinateurs pour valider des démonstrations est une forme nouvelle d'expérimentation mathématique ; elle s'ajoute à d'autres qui envahissent la science de l'abstraction et dont Gauss, précurseur du mouvement, aurait, sans doute, été grand amateur.

Jean-Paul DELAHAYE est professeur d'informatique à l'Univ. de Lille.

J. BORWEIN, D. BAILEY et R. GIRGENSOHN, *Experimentation in Mathematics : Computational Paths to Discovery*, Natick, MA, A. K. Peters, 2004.

J. BORWEIN et D. BAILEY, *Mathematics by Experiment : Plausible Reasoning in the 21st Century*, Natick, MA, A. K. Peters, 2003.

D. BAILEY, J. BORWEIN et K. DEVLIN, *The Experimental Mathematician : a Computational Guide to the Mathematical Unknown*, Natick, 2002.

K. HARE, *More on the Total Number of Prime Factors of an Odd Perfect Number*, in *Mathematics of Computation*, 2003.

F. GUÉNARD et H. LEMBERG, *La méthode expérimentale en mathématiques*, Springer-Verlag, Heidelberg, 2001.