Paradoxes

Rubrique de divertissements mathématiques pour ceux qui aiment se prendre la tête

Par **Jean-Paul DELAHAYE**
Professeur à l'Université Lille 1 *

* Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Lille, UMR CNRS 8022, Bât. M3 extension

Les paradoxes stimulent l'esprit et sont à l'origine de nombreux progrès mathématiques. Notre but est de vous provoquer et de vous faire réfléchir. Si vous pensez avoir une solution au paradoxe proposé, envoyez-la moi (faire parvenir le courrier à l'Espace Culture ou à l'adresse électronique delahaye@lifl.fr).

LE PARADOXE PRÉCÉDENT : LE CONGRÈS DES MYOPES

Le congrès annuel des myopes se réunit. Un jeu est organisé avec 11 des congressistes. Après quelques minutes de discussion, pendant lesquelles les 11 myopes ont pu convenir de la stratégie qu'ils allaient utiliser, l'arbitre du jeu pose un chapeau noir ou rouge sur la tête de chacun et dispose les joueurs en cercle de telle façon que :
- Le myope 1 voit le chapeau du myope 11 et lui seulement ;
- Le myope 2 voit le chapeau du myope 1 et lui seulement ;
- ...
- Le myope 11 voit le chapeau du myope 10 et lui seulement.

Simultanément, chacun des 11 myopes indique la couleur du chapeau qu'il pense porter. Il a été convenu que l'ensemble des 11 joueurs gagnait le droit de revenir gratuitement au congrès l'année suivante si l'un d'eux, au moins, donnait la bonne réponse.
En répondant au hasard, ils ont peu de chance de perdre, mais l'arbitre a pu les espionner pendant qu'ils parlaient avant l'épreuve et il est possible qu'il exploite ce qu'il a entendu pour les faire perdre. Pourtant, même dans un tel cas, les 11 joueurs sont certains de gagner. Quelle stratégie ont-ils convenu qui assure à 100 % que l'un d'eux (au moins) proposera la bonne couleur pour le chapeau qu'il porte ?
L'existence d'une telle stratégie peut vous sembler paradoxale (puisque l'arbitre fait ce qu'il veut et qu'il a entendu la discussion des 11 myopes), pourtant elle ne l'est pas et en recherchant un peu vous la découvrirez.
Plus étonnant, et maintenant on est encore plus proche d'un paradoxe, on demandait aux lecteurs de résoudre un second problème :
- Prouvez que si l'un des myopes est en réalité un aveugle alors, cette fois, aucune stratégie convenue à l'avance ne peut fonctionner dans 100 % des cas. Notez bien que, comme précédemment, on ne demande aux joueurs que de s'arranger pour qu'au moins l'un d'eux devine correctement la couleur du chapeau qu'il porte.

Solution

Merci aux lecteurs qui m'ont fait parvenir leurs réponses. Ce sont dans l'ordre Virginie Delsart, Nicolas Vaneecloo, Thomas Delclite, Jef Van Staeyen, Clément Théry, Ronan Taillandier, Eudes Jouët-Pastré et Karim Bouasla.

Une stratégie gagnante à tous coups pour l'équipe de myopes est la suivante. Le premier myope (ou l'un des myopes choisi une fois pour toutes) indique la couleur qu'il voit devant lui. Les autres indiquent la couleur inverse de celle qu'ils voient devant eux. De deux choses l'une :
(a) Tous les chapeaux ont la même couleur. Dans ce cas, le premier myope a deviné la couleur de son chapeau.
(b) Les couleurs ne sont pas toutes identiques. Dans ce cas, il existe au moins deux myopes qui ont devant eux un chapeau différent du leur, l'un au moins n'est pas le premier myope et donc devine la couleur de son chapeau.
Notez que cette stratégie fonctionne avec un nombre pair ou impair de joueurs.
Pour le second problème, on peut, sans perte de généralité, supposer que le cercle des onze joueurs est composé : de l'aveugle, du myope 1 qui voit le chapeau de l'aveugle, du myope 2 qui voit le chapeau du myope 1, du myope 3 qui voit le chapeau du myope 2, ..., du myope 10 qui voit le chapeau du myope 9.
Une stratégie qui ne fait pas intervenir le hasard (on se limite à ce type de stratégies dans un premier temps) est une règle qui, en fonction de ce que voit un joueur, décide ce qu'il doit répondre. Une stratégie s'exprime donc sous la forme d'une série de consignes de genre :
- L'aveugle propose *rouge* ;
- Le myope 1 propose *rouge* s'il voit un chapeau noir et *noir* s'il voit un chapeau rouge ;
- Le myope 2 propose *noir* s'il voit un chapeau noir et *noir* s'il voit un chapeau rouge.
- etc.
- Le myope 10 propose *rouge* s'il voit un chapeau noir et *noir* s'il voit un chapeau rouge.

Au total, il y a 21 éléments de consigne (écrits en italique dans l'exemple) pour définir une stratégie, ce qui signifie qu'il y a 2^{21} stratégies différentes possibles.
Imaginons qu'une telle stratégie est fixée.
La réponse de l'aveugle est fixée. On ne considérera, pour la suite du raisonnement, que des distributions de chapeaux qui comporteront pour lui un chapeau de la mauvaise couleur (si la stratégie retenue lui commande, par exemple, de dire rouge, toutes les distributions de la suite du raisonnement lui attribueront un chapeau noir).

Si la réponse du myope 1 (celui qui voit le chapeau de l'aveugle) est rouge pour la couleur que nous venons de fixer pour l'aveugle, nous n'envisagerons pour la suite que des distributions de couleurs où le chapeau du myope 1 est noir, et inversement. Il en résulte que, pour toutes les distributions de chapeaux que nous envisagerons par la suite, l'aveugle et le myope 1 se tromperont.
Si la réponse du myope 2 est rouge pour la couleur que nous venons de fixer pour le myope 1, nous n'envisagerons, pour la suite, que des distributions de couleurs où le chapeau du myope 2 est noir, et inversement. Il en résulte que, pour toutes les distributions de chapeaux que nous envisagerons pour la suite, l'aveugle, le myope 1 et le myope 2 seront dans l'erreur.
On continue de la même façon construisant ainsi, petit à petit, une distribution de chapeaux qui met l'aveugle et les 10 myopes en défaut. Cette distribution qui existe donc, quelle que soit la stratégie convenue à l'avance par les 10 myopes et l'aveugle, montre qu'aucune stratégie ne réussit à garantir au moins une réponse juste pour chaque distribution possible. En conséquence, si l'arbitre les a espionnés, il est certain de pouvoir les faire perdre. Dans le cas où il ne les a pas espionnés et où il pose les chapeaux au hasard, il a au moins une chance sur 2^{11} de les faire perdre.
Le raisonnement précédent suppose que les joueurs ne jouent pas au hasard, autrement dit que la stratégie est *déterministe*. Si elle ne l'était pas (c'est-à-dire si elle est probabiliste) et qu'elle était gagnante dans 100 % des cas, alors, en retenant, face à une distribution donnée, l'une des réponses possibles de la stratégie, on en tirerait une stratégie déterministe gagnante dans 100 % des cas. Comme de telles stratégies n'existent pas d'après la première partie du raisonnement, on en déduit que, même utilisant le hasard, aucune stratégie de jeux (déterministe ou probabiliste) ne gagne dans 100 % des cas.

NOUVEAU PARADOXE : LES DEUX PAIRES DE CHAUSSETTES

Il fait froid, Lucien a décidé de mettre deux paires de chaussettes (l'une est rouge et l'autre est noire). Lucien sait qu'elles sont rangées dans son tiroir qui ne contient rien d'autre. Il fait nuit et, pour ne pas déranger, il n'allume pas la lumière. Il met ses chaussettes au hasard. Lucien n'aura pas à les enlever et à les remettre une seconde fois dans la cuisine si chaque pied porte deux chaussettes différentes dans le même ordre, par exemple une rouge en dessous et une noire au-dessus à chaque pied.

Lucien se demande quelle est la probabilité pour qu'il réussisse du premier coup à mettre ses 4 chaussettes d'une façon convenable ?

Raisonnement 1
Lucien prend une chaussette au hasard, il la met à son pied droit. Il en prend une seconde, il la met à son pied droit par-dessus la première. Tout sera correct à cet instant si la seconde chaussette – prise parmi trois – n'est pas la jumelle de celle mise en premier. Cela se produira **deux fois sur trois** (car la chaussette jumelle de celle déjà enfilée est l'une des trois qui restent). Ensuite, il met à son pied gauche une troisième chaussette (prise parmi deux différentes). Elle doit être la jumelle de celle mise en premier à droite, cela se produira **une fois sur deux**. La dernière sera alors nécessairement convenable.
En tout, la probabilité de réussir est donc **P = 2/3 x 1/2 = 1/3**.

Raisonnement 2
Lucien prend deux chaussettes au hasard et les met à son pied droit. Il faut qu'elles soient différentes. Les choix possibles sont rouge-rouge, noire-noire, rouge-noire, noire-rouge. Lucien a donc **une chance sur deux** de mettre ses deux chaussettes sans s'engager vers une configuration insatisfaisante. Ensuite, il doit mettre les deux autres chaussettes (qui sont de couleurs différentes) dans le bon ordre, et cela donnera quelque chose de convenable **une fois sur deux**.
Lucien réussira donc une fois sur quatre : **P = 1/4**

Raisonnement 3
Lucien prend deux chaussettes au hasard et en met une à droite, l'autre à gauche. Pour que cela ne l'engage pas vers une mauvaise configuration, il faut que les deux chaussettes choisies soient de la même couleur. Les possibilités sont rouge-rouge, noire-noire, rouge-noire, noire-rouge. Donc une configuration convenable se produira **une fois sur deux**. Si c'est le cas, les deux autres chaussettes seront aussi convenablement placées.
La probabilité de réussir est donc 1/2 : **P = 1/2**.

Voilà qui est étrange et paradoxal : la probabilité de réussir ne peut pas être à la fois 1/4, 1/3 et 1/2.
Quel raisonnement est bon ? Expliquez alors pourquoi les deux autres sont faux. Autre possibilité : ils sont tous bons, car la probabilité de réussir dépend de la procédure qu'on utilise et la conclusion doit donc être qu'il faut utiliser la troisième méthode puisqu'elle me donne une chance sur deux de réussir ce qui est le mieux.