Numer. Math. 34, 333–347 (1980)

Numerische Mathematik

Algorithmes pour suites non convergentes

Jean-Paul Delahaye

U.E.R.I.E.E.A, 59650 Villeneuve d'Ascq, France

Algorithms for Non-Convergent Sequences

Summary. Two algorithms are proposed. For a given non-convergent sequence the first answers the question: How many cluster points does the sequence possess? The second one allows one to extract convergent sequences for any sequence with a finite number of cluster points.

It was necessary to use the notion of strength of a cluster point. Two negative theorems show the necessity of the proposed hypotheses.

Subject Classifications: AMS(MOS): 65B99; CR: 5.19.

0. Introduction

Il est fréquent en analyse numérique de rencontrer des algorithmes itératifs infinis donnant des suites de points non nécessairement convergentes, mais dont on sait que les points d'accumulation possèdent des propriétés intéressantes. Cela se produit en optimisation où, bien des résultats ne valent que pour les points d'accumulation des suites engendrées ([9–11, 14, 16]).

Cela se produit aussi avec l'itération $x_{n+1}=f(x_n)$ (f: application continue d'un espace localement compact dans lui-même) dont on sait qu'elle donne des suites dont chacun des points d'accumulation, quand ils sont en nombre fini vérifie: $x=f^p(x)$ [3, 13, 15].

Cela se produit encore pour les algorithmes de recherche de point fixe d'application multivoque ([5, 6, 12]).

Ce sont ces raisons en particulier qui nous ont conduits à étudier quelles informations il était possible de tirer d'une suite non convergente que l'on suppose donnée progressivement.

Nous présentons ici deux types de procédés

– ceux que nous appelons algorithmes-questions et qui, étape par étape, en ne disposant à l'étape p que d'un nombre fini de points de la suite traitée, donnent une

0029-599X/80/0034/0333/$03.00

suite de réponses $N(p)$ à une question posée (par exemple ici: ‹quel est le nombre de points d'accumulation de la suite?›). La suite $N(p)$ sera constante à partir d'une certaine étape et donnera la bonne réponse, pour toute suite vérifiant certaines propriétés explicitées (voir théorèmes 1 et 2)

– ceux que nous appelons algorithmes d'extraction qui d'étape en étape construisent des sous-suites de la suite (x_n) donnée. Certaines ou toutes ces sous-suites étant convergentes (voir théorèmes 3 et 4).

Pour formuler les hypothèses permettant la convergence de nos algorithmes, il a été nécessaire d'introduire la notion de ‹force d'un point d'accumulation› que nous avons présentée dans l'appendice, avec quelques autres définitions. Les classes de suites pour lesquelles nos méthodes fonctionnent sont, comme en accélération de la convergence ([2, 8]), des classes relativement réduites. Nous avons montré qu'il ne pouvait pas en être autrement car dès qu'une classe de suites est trop grande aucun algorithme ne peut exister traitant toutes les suites de cette classe (voir théorèmes 5 et 6).

1. Algorithmes-Questions

(pour le problème du dénombrement des points d'accumulation)

Une suite bornée (x_n) de points de $\mathbb{R}^m$ étant donnée nous allons chercher à répondre à la question: ‹quel est le nombre de points d'accumulation de (x_n)?›.

Algorithmes N.P.A. $(\rho, \alpha(p), \beta(p))$

ρ est un réel fixé, strictement positif.

$\alpha(p)$ et $\beta(p)$ sont deux suites d'entiers vérifiant:

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \beta(p) \geqq \alpha(p) \geqq p.$$

Etape p. On dispose des points $x_{\alpha(p)}, x_{\alpha(p)+1}, \ldots, x_{\beta(p)-1}$. On détermine le nombre de composantes connexes du graphe dont les sommets sont les points x_i ($i \in \{\alpha(p), \alpha(p)+1, \ldots, \beta(p)-1\}$) et dont les arcs (non orientés) sont les paires $\{x_i, x_j\}$ telles que:

$$d(x_i, x_j) \leqq \frac{2\rho}{5}.$$

Soit $N(p)$ ce nombre.

Théorème 1. *Pour toute suite bornée (x_n) de points de $\mathbb{R}^m$ ayant un nombre fini de points d'accumulation de force strictement positive*[1] *et mutuellement éloignés de plus de ρ, la suite $N(p)$ des réponses données par l'algorithme N.P.A (ρ, p, p^2) est constante à partir d'un certain rang et égale au nombre de points d'accumulation de la suite (x_n).*

Théorème 2. *Pour toute suite bornée (x_n) de points de $\mathbb{R}^m$ presque pseudo-périodique*[1] *de constante k, dont les points d'accumulation sont mutuellement éloignés de plus de ρ, la suite $N(p)$ des réponses données par l'algorithme N.P.A. $(\rho, p, p+k)$ est constante à partir d'un certain rang et égale au nombre de points d'accumulation de la suite (x_n).*

[1] Voir appendice

Remarque 1. Les théorèmes 1 et 2 peuvent être généralisés des diverses manières suivantes:

1° A la place de $\mathbb{R}^m$, on peut prendre n'importe quel espace métrique localement compact (la suite (x_n) étant alors supposée contenue dans un compact).

2° Dans le théorème 1 à la place de N.P.A. (ρ, p, p^2) on peut prendre N.P.A. $(\rho, \alpha(p), \beta(p))$ avec:

$$\lim_{p \to +\infty} \alpha(p) = +\infty,$$

$$\exists \lambda > 1, \quad \exists C \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \exists p_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall p \geqq p_0 \colon \beta(p) \geqq C(\alpha(p))^{\lambda}.$$

Dans le théorème 2 à la place de N.P.A. $(\rho, p, p+k)$ on peut prendre N.P.A. $(\rho, \alpha(p), \beta(p))$ avec:

$$\exists p_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall p \geqq p_0 \colon \beta(p) \geqq \alpha(p) + k,$$
$$\lim_{p \to +\infty} \alpha(p) = +\infty.$$

3° L'hypothèse sur la distance mutuelle des points d'accumulation de la suite traitée peut être remplacée par une hypothèse de ‹rapidité› moyennant une légère adaptation de N.P.A. (voir [3]).

Remarque 2. Les calculs nécessaires à la détermination de $N(p)$ sont relativement peu nombreux; ils augmentent en fonction de $\beta(p) - \alpha(p)$, et donc dans le théorème 2 la durée de l'étape p est bornée.

Remarque 3. Sur le même principe d'autres questions que celle du dénombrement des points d'accumulation, peuvent être étudiées: problèmes de convergence, de périodes etc. ... (voir [3]).

Démonstration. Soit (x_n) une suite satisfaisant les hypothèses du théorème 1 (respectivement du théorème 2).

Soient $y_1, y_2, \ldots, y_l$ ses points d'accumulation. Posons:

$$V = B(y_1, \rho/5) \cup \ldots \cup B(y_l, \rho/5)$$

$(B(a, r)$ désigne la boule ouverte de centre a et de rayon $r)$.

Il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que:

$$\forall p \geqq p_0 \colon x_p \in V \tag{$*$}$$

(un tel p. existe bien car sinon la suite (x_n) admettrait un point d'accumulation distinct de $y_1, \ldots, y_l$).

Il existe $p_1 \in \mathbb{N}$, $p_1 \geqq p_0$ tel que pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$:

$$\forall p \geqq p_1 \colon \{x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{p^2-1}\} \cap B(y_i, \rho/5) \neq \emptyset \tag{$**$}$$

(respectivement:

$$\forall p \geqq p_1 \colon \{x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{p+k-1}\} \cap B(y_i, \rho/5) \neq \emptyset).$$

Cela résulte de la propriété ii) (voir appendice). (Respectivement cela résulte de ce que les suites $(x_{n_1})_{n_1 \in N_1}, \ldots, (x_{n_r})_{n_r \in N_r}$ sont toutes convergentes et que (F_k) est vérifiée.)

Montrons maintenant que pour $p \geqq p_1$: $N(p)=l$.

Soit $p \geqq p_1$, la relation (*) entraîne que:

$$\forall l_1, l_2 \in \{1,2,\ldots,l\}: l_1 \neq l_2$$
$$\Rightarrow d(B(y_{l_1}, \rho/5) \cap \{x_p, \ldots, x_{\beta(p)-1}\}, B(y_{l_2}, \rho/5) \cap \{x_p, \ldots, x_{\beta(p)-1}\}) > 2\rho/5$$

avec $\beta(p)=p^2$ (respectivement $\beta(p)=p+k$).

Ce qui avec la relation (**) montre que $N(p) \geqq l$.

D'autre part la relation (*) entraîne aussi que:

$$\forall n_1, n_2 \in \{p, p+1, \ldots, \beta(p)-1\},$$
$$[n_1 \neq n_2 \text{ et } \exists l' \in \{1,2,\ldots,l\}\; x_{n_1} \in B(y_{l'}, \rho/5)\, x_{n_2} \in B(y_{l'}, \rho/5)]$$
$$\Rightarrow d(x_{n_1}, x_{n_2}) \leqq 2\rho/5$$

ce qui montre que: $N(p) \leqq l$.

Exemple 1. Soient les suites (y_n), (z_n) et (s_n) définies par:

$$(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (3,2,3,1,2,3,2,3,1,2,\ldots),$$
$$(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2,-2,1,-1,\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4},-\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{8},-\tfrac{1}{8},\ldots),$$
$$(s_n)_{n\in\mathbb{N}} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} + (z_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Appliquons à la suite (s_n) (qui est presque pseudo-périodique de constante $k=5$) l'algorithme N.P.A. (1, $5p$, $5p+5$).

Les premières étapes sont:

Etape 0. Les points traités sont:

$$s_0=5, s_1=0, s_2=4\; s_3=0\; s_4=2+\tfrac{1}{2}.$$

Les arêtes du graphe sont:

$$\{s_1, s_3\}.$$

La réponse donnée est $N(0)=4$.

Etape 1. Les points traités sont:

$$s_5=2+\tfrac{1}{2}\, s_6=2+\tfrac{1}{4}\, s_7=2+\tfrac{3}{4}\, s_8=1+\tfrac{1}{8}\, s_9=2-\tfrac{1}{8}.$$

Les arêtes du graphe sont:

$$\{s_5, s_6\},\; \{s_5, s_7\},\; \{s_9, s_6\}.$$

La réponse donnée est $N(1)=2$.

Etape 2. Les points traités sont:

$$s_{10}=3+\tfrac{1}{16}\, s_{11}=2-\tfrac{1}{16}\, s_{12}=3+\tfrac{1}{32}\, s_{13}=1-\tfrac{1}{32}\, s_{14}=2+\tfrac{1}{64}.$$

Les arêtes du graphe sont:

$$\{s_{11}, s_{14}\},\; \{s_{10}, s_{12}\}.$$

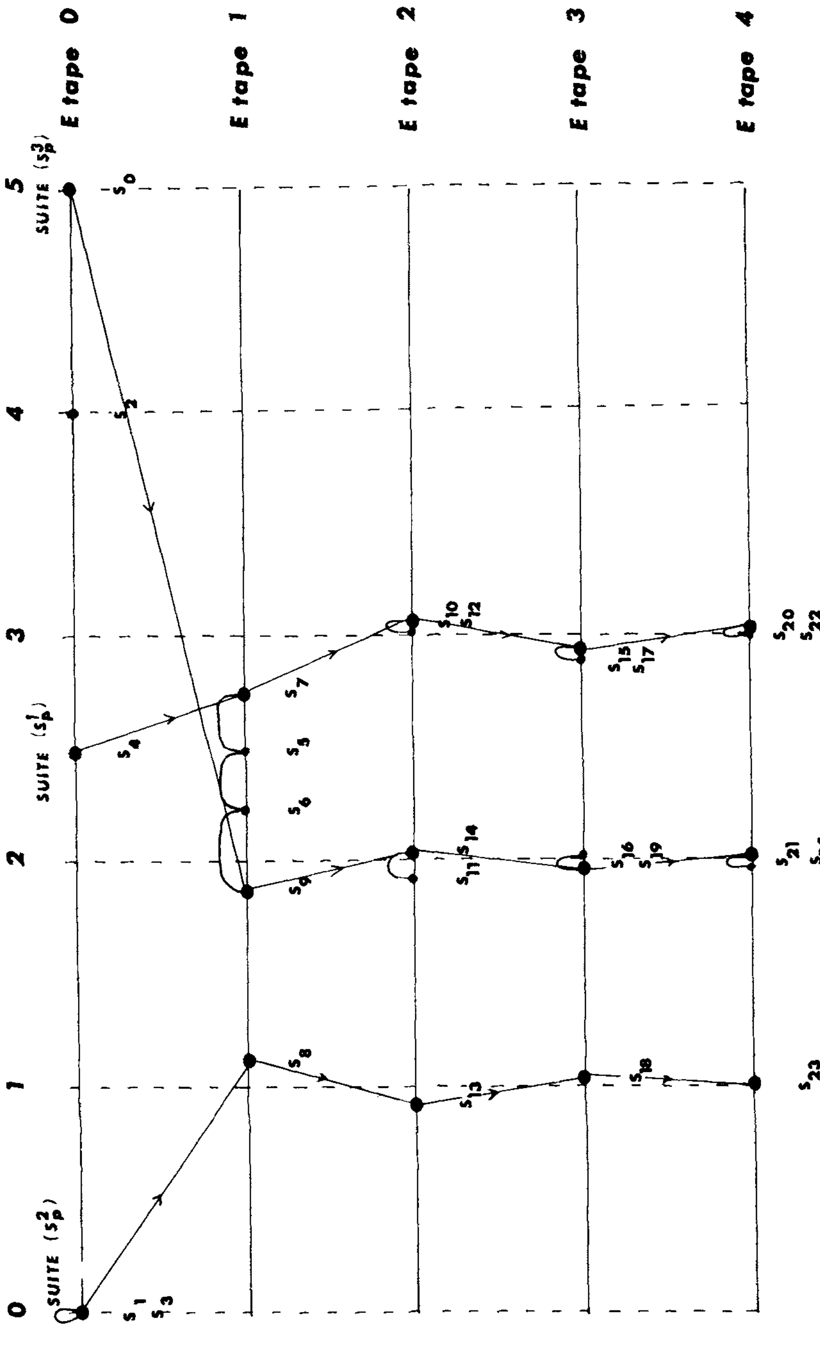
E tape 0
E tape 1
E tape 2
E tape 3
E tape 4
SUITE (s_p^3)
SUITE (s_p^1)
SUITE (s_p^2)
0
1
2
3
4
5
s_0
s_1
s_2
s_3
s_4
s_5
s_6
s_7
s_8
s_9
s_{10}
s_{11}
s_{12}
s_{13}
s_{14}
s_{15}
s_{16}
s_{17}
s_{18}
s_{19}
s_{20}
s_{21}
s_{22}
s_{23}
s_{24}

Fig. 1

La réponse donnée est $N(2)=3$.

On vérifie facilement que conformément au théorème 2:

$$\forall p \geqq 2:\ N(p)=3$$

(voir figure 1).

2. Algorithmes d'extraction

Une suite bornée (x_n) de points de $\mathbb{R}^m$ étant donnée, on suppose que cette suite n'admet qu'un nombre fini de points d'accumulation et on cherche à extraire des sous-suites qui soient convergentes.

Algorithmes S. $(k, \alpha(p), \beta(p))$

k est un entier fixé (c'est le nombre de sous-suites que l'on extrait) $\alpha(p)$ et $\beta(p)$ sont deux suites d'entiers vérifiant:

$$\forall p \in \mathbb{N}:\ \beta(p) \geqq \alpha(p)+k \quad \text{et} \quad \alpha(p) \geqq p.$$

Etape p. Les étapes précédentes ont déterminé k sous-suites finies $(x_0^1, x_1^1, \ldots, x_{p-1}^1)$; $(x_0^2, x_1^2, \ldots, x_{p-1}^2)$; ... ;$({}_0^k, x_1^k, \ldots, x_{p-1}^k)$ l'étape p va déterminer k points $x_p^1, x_p^2, \ldots, x_p^k$ qui vont les allonger chacune d'un point.

On dispose des points $x_{\alpha(p)}, x_{\alpha(p)+1}, \ldots, x_{\beta(p)-1}$.

Phase de recherche de k points mutuellement éloignés

Pas 1. On pose: $a_1 = x_{\beta(p)-1}$.

Pas 2. On pose: $A_1 = \{a_1\}$ et on cherche le point x_i $(i \in \{\alpha(p), \alpha(p)+1, \ldots, \beta(p)-1\})$ le plus éloigné de A_1 (s'il y a des ex-aequo, on choisit par exemple le x_i d'indice le plus grand). Ceci détermine un point a_2.

Pas 3. On pose: $A_2 = \{a_1, a_2\}$ et on cherche le point $x_i (i \in \{\alpha(p), \alpha(p)+1, \ldots, \beta(p)-1\})$ le plus éloigné de A_2. Ceci détermine un point a_3.

⋮

Pas k. On pose: $A_{k-1} = \{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}\}$ et on cherche le point x_i $(i \in \{\alpha(p), \alpha(p)+1, \ldots, \beta(p)-1\})$ le plus éloigné de A_{k-1}. Ceci détermine un point a_k.

Phase d'allongement des sous-suites finies

Pas 1. On prend pour x_p^1 le a_i le plus proche de x_{p-1}^1 (s'il y a des ex-aequo on prend par exemple le a_i d'indice le plus grand).

Pas 2. On prend pour x_p^2 le a_i $(i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $a_i \neq x_p^1)$ le plus proche de x_{p-1}^2.

⋮

Pas k. On prend pour x_p^k le seul a_i qui reste dans:

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_k\} - \{x_p^1, x_p^2, \ldots, x_p^{k-1}\}.$$

A l'étape 0, la phase d'allongement se réduit à poser:

$$x_p^1 = a_1, \; x_p^2 = a_2, \ldots x_p^k = a_k.$$

Fin de l'étape p.

Théorème 3. *Pour toute suite bornée (x_n) de points de $\mathbb{R}^m$ ayant k' points d'accumulation $y_1, y_2, \ldots, y_{k'}$ de force strictement positive, avec $k' \leqq k$, l'algorithme $S(k, p, p^2 + k)$ construit k sous-suites dont l'une au moins converge vers y_1 (respectivement $y_2, \ldots, y_{k'}$). En particulier lorsque $k = k'$ toutes les sous-suites sont convergentes (vers $y_1, y_2, \ldots, y_k$).*

Théorème 4. *Pour toute suite bornée (x_n) de points de $\mathbb{R}^m$ presque pseudo-périodique de constante k et ayant k' points d'accumulation $y_1, y_2, \ldots, y_{k'}$ l'algorithme $S(k, p, p + k)$ construit k sous-suites dont l'une au moins converge vers y_1 (respectivement $y_2, \ldots, y_{k'}$). En particulier lorsque $k = k'$ toutes les sous-suites sont convergentes (vers $y_1, y_2, \ldots, y_k$).*

Remarque 1. Les théorèmes 3 et 4 peuvent être généralisés des diverses manières suivantes:

1° A la place de $\mathbb{R}^m$ on peut prendre n'importe quel espace métrique localement compact (la suite (x_n) étant alors supposée contenue dans un compact).

2° Dans le théorème 3 à la place de $S(k, p, p^2 + k)$ on peut prendre $S(k, \alpha(p), \beta(p))$ avec:

$$\lim_{p \to +\infty} \alpha(p) = +\infty,$$

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \beta(p) \geqq \alpha(p) + k,$$

$$\exists \lambda > 1, \quad \exists C \in \mathbb{R}^{*+}, \quad \exists p_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall p \geqq p_0: \beta(p) \geqq C(\alpha(p))^\lambda.$$

Dans le théorème 4 à la place de $S(k, p, p + k)$ on peut prendre $S(k, \alpha(p), \beta(p))$ avec:

$$\lim_{p \to +\infty} \alpha(p) = +\infty,$$

$$\forall p \in \mathbb{N}: \beta(p) \geqq \alpha(p) + k.$$

3° La phase de recherche de k points mutuellement éloignés peut se faire de manière différente de la nôtre (que nous avons choisie pour des raisons d'économie de calculs). Par exemple, on peut d'abord rechercher un partitionnement naturel de l'ensemble $\{x_{\alpha(p)}, \ldots, x_{\beta(p)-1}\}$ à l'aide de méthodes de classification automatique (voir [1]) puis prendre un a_i dans chaque ensemble de la partition obtenue (voir [3]).

Remarque 2. De nombreuses expériences numériques ont été faites concernant ces algorithmes. Outre une bonne efficacité ces algorithmes nécessitent des temps de calcul relativement petits (voir [4]).

Démonstration. Soit (x_n) une suite satisfaisant les hypothèses du théorème 3 (respectivement du théorème 4).

Soient $y_1, y_2, \ldots, y_{k'}$ ses points d'accumulation.

Posons $\varepsilon = \min\{d(y_i, y_j) | i, j \in \{1, 2, \ldots, k'\} \; i \neq j\}$

$$V = B(y_1, \varepsilon/5) \cup \ldots \cup B(y_{k'}, \varepsilon/5).$$

Soit $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que:

$$\forall p \geqq p_0: x_p \in V.$$

Soit $p_1 \geqq p_0$ tel que:

$$\forall p \geqq p_1, \forall i \in \{1, 2, \dots, k'\} \colon \{x_p, x_{p+1}, \dots, x_{\beta(p)-1}\} \cap B(y_i, \varepsilon/5) \neq \emptyset$$

avec $\beta(p) = p^2 + k$ (respectivement $\beta(p) = p + k$).

Pour tout $p \geqq p_1$ les ensembles:

$$\{x_p, x_{p+1}, \dots, x_{\beta(p)-1}\} \cap B(y_i, \varepsilon/5), i \in \{1, 2, \dots, k'\}$$

forment une partition de l'ensemble $\{x_p, x_{p+1}, \dots, x_{\beta(p)-1}\}$. Il est alors évident que la phase de recherche de points mutuellement éloignés donnera à l'étape p, k points: $a_1, a_2, \dots, a_k$, tels que chaque boule $B(y_i, \varepsilon/5)$ ($i \in \{1, 2, \dots, k'\}$) contiendra au moins l'un deux.

Soit $i(1) \in \{1, 2, \dots, k'\}$ tel que:

$$x^1_{p_1} \in B(y_{i(1)}, \varepsilon/5).$$

Par récurrence il est clair que:

$$\forall p \geqq p_1 \colon x^1_p \in B(y_{i(1)}, \varepsilon/5)$$

la sous-suite (x^1_p) est donc convergente vers $y_{i(1)}$.

Soit $i(2) \in \{1, 2, \dots, k'\}$ tel que:

$$x^2_{p_1} \in B(y_{i(2)}, \varepsilon/5).$$

Trois cas peuvent se présenter:

a) $i(2) \neq i(1)$

On établit alors par récurrence que:

$$\forall p \geqq p_1 \colon x^2_p \in B(y_{i(2)}, \varepsilon/5)$$

la sous-suite (x^2_p) est donc convergente vers $y_{i(2)}$.

b) $i(2) = i(1)$ et pour tout $p \geqq p_1$:

il y a plus de deux points $a_i (i \in \{1, 2, \dots, k\})$ dans la boule $B(y_{i(1)}, \varepsilon/5)$.

On établit alors par récurrence que:

$$\forall p \geqq p_1 \colon x^2_p \in B(y_{i(1)}, \varepsilon/5)$$

la sous-suite (x^2_p) est donc convergente vers $y_{i(1)}$.

c) $i(2) = i(1)$ et il existe $p \geqq p_1$ tel que

(■) la boule $B(y_{i(1)}, \varepsilon/5)$ ne contient qu'un seul $a_i (i \in \{1, 2, \dots, k)\}$.

Soit p_2 le plus petit entier $\geqq p_1$ tel que (■) et soit $i'(2) \in \{1, 2, \dots, k'\}$ tel que:

$$x^2_{p_2} \in B(y_{i'(2)}, \varepsilon/5).$$

On a $i'(2) \neq i(1)$ ce qui permet de montrer par récurrence que:

$$\forall p \geqq p_2 \colon x^2_p \in B(y_{i'(2)}, \varepsilon/5)$$

la sous-suite (x^2_p) converge donc vers $y_{i'(2)}$.

La suite de la démonstration se fait de manière analogue.

On montre que la suite (x_p^3) ou bien est convergente ou bien n'admet que deux points d'accumulation $y_{i(1)}$ et $y_{i(2)}$ (ou $y_{i'(2)}$), et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on ait trouvé k' suites convergentes.

On remarquera que parmi les k' suites convergentes, il y a toujours les suites (x_p^1) et (x_p^2).

Cette dissymétrie entre les deux premières sous-suites extraites et les autres a son origine dans la dissymétrie de la phase d'allongement car comme on peut le voir la suite (x_n^1) est ‹la première servie› la suite (x_n^2) ‹la seconde servie›, ..., la suite (x_n^k), elle, n'a que ‹le reste›.

Exemple 1. On reprend les données de l'exemple 1 du paragraphe 1.

On applique à la suite (s_n) l'algorithme $S(3, 5p, 5(p+1))$; les premières étapes sont:

Etape 0. Points traités: s_0, s_1, s_2, s_3, s_4

$$a_1 = s_4, a_2 = s_3, a_3 = s_0,$$
$$s_0^1 = a_1, s_0^2 = a_2, s_0^3 = a_3.$$

Etape 1. Points traités: s_5, s_6, s_7, s_8, s_9

$$a_1 = s_9, a_2 = s_7, a_3 = s_8,$$
$$s_1^1 = a_2, s_1^2 = a_3, s_1^3 = a_1.$$

Etape 2. Points traités: $s_{10}, s_{11}, s_{12}, s_{13}, s_{14}$

$$a_1 = s_{14}, a_2 = s_{13}, a_3 = s_{12},$$
$$s_2^1 = a_3, s_2^2 = a_2, s_2^3 = a_1.$$

Il est clair que les suites (s_p^1), (s_p^2), (s_p^3) convergent respectivement vers 3, 1, 2 qui sont les trois points d'accumulation de (x_n) (voir figure 1).

Exemple 2. Il se peut que certaines des sous-suites construites ne soient pas convergentes; en voici un exemple:

soient $(y_n) = (0, 0, 5, 0, 5, 5, 0, 0, 5, 0, 5, 5, \ldots)$

$(z_n) = (0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, \frac{1}{2}, \ldots)$

$(s_n) = (y_n) + (z_n)$.

On applique l'algorithme $S(3, 3p, 3(p+1))$.

Etape 0. $s_0^1 = s_2 \; s_0^2 = s_0 \; s_0^3 = s_1$.

Etape 1. $s_1^1 = s_4 \; s_1^2 = s_3 \; s_1^3 = s_5$.

Etape 2. $s_2^1 = s_8 \; s_2^2 = s_6 \; s_2^3 = s_7$.

Etape 3. $s_3^1 = s_{10} \; s_3^2 = s_9 \; s_3^3 = s_{11}$.

Etape 4. $s_4^1 = s_{14} \; s_4^2 = s_{12} \; s_4^3 = s_{13}$.

Etape 5. $s_5^1 = s_{16} \; s_5^2 = s_{15} \; s_5^3 = s_{17}$ (voir Fig. 2).

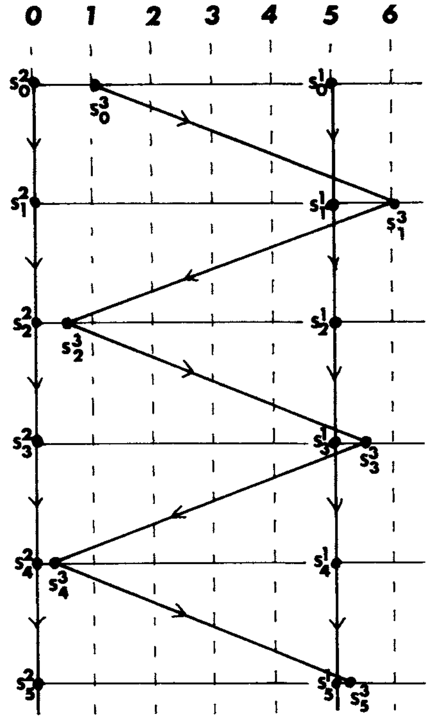

Fig. 2

Les sous-suites (s_n^1) et (s_n^2) sont convergentes comme prévu. La suite (s_n^3) elle, ne l'est pas.

(On peut trouver d'autres exemples numériques dans [3] et [4].)

3. Résultats négatifs

Nous allons maintenant établir que, sans hypothèse assez forte sur les suites traitées, non seulement les algorithmes présentés aux paragraphes 1 et 2 ne convergent pas mais que de plus, aucun algorithme ne peut fonctionner.

Nous appellerons algorithme pour suites de points de $\mathbb{R}^m$ la donnée:

i) d'un ensemble R (appelé ensemble des réponses),
ii) d'une application $\mathscr{R}$: $\mathbb{N} \times \mathscr{S}_f(\mathbb{R}^n) \times \mathscr{S}_f(R) \rightarrow R$,
iii) d'une application $\mathscr{C} = (\alpha, \beta)$: $\mathbb{N} \times \mathscr{S}_f(\mathbb{R}^n) \times \mathscr{S}_f(R) \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

($\mathscr{S}_f(E)$ désigne l'ensemble des suites finies d'éléments de E.)

Dans les algorithmes-questions R sera un ensemble discret par exemple $\{\text{OUI}, \text{NON}\}$, $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ ou $\mathbb{N}$.

Dans les algorithmes d'extraction de k sous-suites R sera $(\mathbb{R}^m)^k$ (à chaque étape on prolonge k sous-suites).

Appliquée à une suite (x_n) donnée l'algorithme $(R, \mathscr{R}, \mathscr{C})$ fonctionnera de la façon suivante:

Etape 0. Soit $(\alpha(0), \beta(0)) = \mathscr{C}(0, \emptyset, \emptyset) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ($\emptyset$ désigne la suite finie vide). On dispose des points: $x_{\alpha(0)}, x_{\alpha(0)+1}, \ldots, x_{\beta(0)}$. Soit $R_0 = \mathscr{R}(0, (x_{\alpha(0)}, \ldots, x_{\beta(0)}), \emptyset)$. On propose la réponse R_0.

Etape 1. Soit $(\alpha(1), \beta(1)) = \mathscr{C}(1, (x_{\alpha(0)}, \ldots, x_{\beta(0)}), (R_0))$. On dispose des points: $x_{\alpha(1)}, \ldots, x_{\beta(1)}$. Soit $R_1 = \mathscr{R}(1, (x_{\alpha(1)}, x_{\alpha(1)+1}, \ldots, x_{\beta(1)}), (R_0))$. On propose la réponse R_1 etc. ....

Remarque. Dans notre définition que volontairement nous avons faite la plus large possible (pour avoir des résultats négatifs forts) nous autorisons l'algorithme à décider lui-même (en fonction des résultats précédents) de quels points il a besoin pour effectuer l'étape p. Cette liberté nous n'avons pas eu besoin de l'utiliser pour les algorithmes N.P.A. et S. puisque $\alpha(p)$ et $\beta(p)$ étaient fixés une fois pour toutes (ce qui signifie de façon précise que l'application $\mathscr{C}$ ne dépendait dans ces exemples que de la première variable). Toujours par souci de généralité nous n'imposons pas aux applications $\mathscr{R}$ et $\mathscr{C}$ des conditions de calculabilité.

Théorème 5. *Il n'existe pas d'algorithme répondant de façon satisfaisante à partir d'une certaine étape à la question:*

‹Quel est le nombre de points d'accumulation de (x_n)?›

pour toute suite (x_n) de points de $\mathbb{R}^m$ pseudo-périodique bornée de période 1 ou 2.

L'impossibilité s'étend bien évidemment à toute famille de suites (x_n) contenant les suites pseudo-périodiques bornées de période 1 ou 2. En particulier on a donc:

Corollaire. *Il n'existe pas d'algorithme répondant de façon satisfaisante à partir d'une certaine étape à la question:*

‹Quel est le nombre points d'accumulation de (x_n)?›

pour toute suite (x_n) de points de $\mathbb{R}^m$ bornée ayant un nombre fini de points d'accumulation de force strictement positive (ou presque pseudo-périodique).

Ces résultats montrent que dans les théorèmes 1 et 2 les hypothèses faites concernant la distance minimum mutuelle des points d'accumulation sont essentielles.

Remarque. Ce théorème et son corollaire restent vrais si on remplace $\mathbb{R}^m$ par un espace métrique E ayant au moins un point d'accumulation.

Démonstration. Pour simplifier les notations prenons $m = 1$. Supposons donné un algorithme A répondant de façon satisfaisante à partir d'une certaine étape à la question:

‹Quel est le nombre de points d'accumulation de (x_n)?›

pour toute suite (x_n) de points de $\mathbb{R}$, pseudo-périodique bornée de période 1 ou 2.

Nous allons construire successivement des suites que nous noterons:

$$(x_n^0)_{n \in \mathbb{N}}, \quad (x_n^1)_{n \in \mathbb{N}}, \ldots, (x_n^m)_{n \in \mathbb{N}}, \ldots$$

– La suite (x_n^0) est définie par:

$$(x_0^0, x_1^0, x_2^0, \ldots) = (0, 0, 0, \ldots).$$

Cette suite est constante (donc convergente!), il existe donc par hypothèse un étape $\theta(0)$ où $R^0_{\theta(0)}=1$. (On note $R^0_0, R^0_1, \ldots, R^0_m, \ldots$ la suite des réponses données par A quand on l'applique à (x^0_n)).

Jusqu'à l'étape $\theta(0)$, l'algorithme A n'a fait intervenir qu'un nombre fini de points de la suite (x^0_n) soit $\gamma(0)$ le plus grand indice des points intervenus.

Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ commençant par les mêmes $\gamma(0)$ premiers points que $(x^0_n)_{n\in\mathbb{N}}$, A donnera les mêmes $\theta(0)$ premières réponses et donc:

$$R_{\theta(0)}=1.$$

– La suite (x^1_n) est définie par:

$$x^1_n=x^0_n \quad \text{si } i\leqq\gamma(0),$$
$$(x^1_{\gamma(0)+1}, x^1_{\gamma(0)+2}, \ldots)=(\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}, 0, \ldots).$$

Cette suite est pseudo-périodique de période 2, il existe donc par hypothèse une étape $\theta(1)$ telle que:

$$R^1_{\theta(1)}=2, \qquad \theta(1)>\theta(0).$$

(On note $R^1_0, R^1_1, \ldots, R^1_m, \ldots$ la suite des réponses données par A quand on l'applique à (x^1_n).)

Jusqu'à l'étape $\theta(1)$, l'algorithme A n'a fait intervenir qu'un nombre fini de points de la suite (x^1_n), soit $\gamma(1)$ supérieur au plus grand indice des points intervenus et tel que:

$$\gamma(1)>\gamma(0).$$

Pour toute suite (x_n) commençant par les mêmes $\gamma(1)$ premiers points que $(x^1_n)_{n\in\mathbb{N}}$, A donnera les mêmes $\theta(1)$ premières réponses et donc:

$$R_{\theta(0)}=1, \qquad R_{\theta(1)}=2.$$

On continue de la même manière, et lorsque les suites $(x^0_n)_{n\in\mathbb{N}}, (x^1_n)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots$ sont construites $((x^0_n), (x^2_n), (x^4_n), \ldots$ convergentes vers 0, $(x^1_n), (x^3_n), (x^5_n)\ldots$ pseudo-périodiques de période 2 ayant pour points d'accumulation 0 et $\frac{1}{2}$ respectivement 0 et $\frac{1}{4}$, 0 et $\frac{1}{8}, \ldots)$ lorsque les indices $\gamma(0), \gamma(1), \ldots$ et les indices $\theta(0), \theta(1), \ldots$ sont déterminés, on construit la suite (x_n) définie par:

$$x_n=x^0_n \quad \text{si } n\in\{0, 1, \ldots, \gamma(0)\},$$
$$x_n=x^1_n \quad \text{si } n\in\{\gamma(0)+1, \ldots, \gamma(1)\},$$
$$x_n=x^2_n \quad \text{si } n\in\{\gamma(1)+1, \ldots, \gamma(2)\}.$$
$$\ldots$$

Cette suite est convergente et donc à partir d'une certaine étape la suite R_i des réponses devrait être constante et égale à 1, ce qui est en contradiction avec notre procédé de construction qui fait que:

$$R_{\theta(1)}=2, \qquad R_{\theta(3)}=2, \qquad R_{\theta(5)}=2, \ldots.$$

Par une méthode semblable [3] on peut établir que l'hypothèse de force strictement positive du théorème 3 est essentielle, de façon précise:

Théorème 6. *Il n'existe pas d'algorithme A tel que:*

pour toute suite bornée (x_n) *de points de* $\mathbb{R}^m$ *ayant* k *points d'accumulation* $(y_1\, y_2, \ldots, y_k)$. *A construit* k *sous-suites convergentes chacune vers un* y_i *différent.*

Appendice
Suites non convergentes et force d'un point d'accumulation

Définition. *Soit* (x_n) *une suite de points de l'espace topologique séparé E*

i) *on dit que* (x_n) *est pseudo-périodique de période* k *si les sous-suites* $(x_{nk})_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_{nk+1})_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (x_{nk+k-1})_{n\in\mathbb{N}}$ *sont convergentes*

ii) *on dit que* (x_n) *est presque pseudo-périodique de constante* k *si il existe* $N_1, N_2, \ldots, N_r \subset \mathbb{N}$ *tels que:*

$$(x_{n_1})_{n_1\in\mathbb{N}_1}, (x_{n_2})_{n_2\in N_2}, \ldots, (x_{n_r})_{n_r\in N_r} \quad \textit{sont convergentes} \quad \bigcup_{i=1}^{r} N_i = \mathbb{N},$$

$$(F_k) \quad \forall n\in\mathbb{N}, \quad \forall i\in\{1,2,\ldots,r\}: N_i \cap \{x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}\} \neq \emptyset.$$

Exemples. Soit $(y_n)=(1,2,2,1,2,2,\ldots)$ et soit (z_n) une suite de réels convergente alors la suite $(x_n)=(y_n)+(z_n)$ est pseudo-périodique de période 3.

Soit σ une permutation de $\mathbb{N}$ vérifiant:

$$\forall n\in\mathbb{N}: |\sigma(n)-n| \leqq m.$$

Alors la suite $(x_{\sigma(n)})$ est presque pseudo-périodique de constante $2m+3$.

Propriétés. i) Si (x_n) est une suite presque pseudo-périodique de constante k elle a au plus k points d'accumulation.

ii) Si (x_n) est pseudo-périodique (x_n) est presque pseudo-périodique.

iii) Si (x_n) et (y_n) sont pseudo-périodiques de périodes k et k', $(x_n)+(y_n)$ est pseudo-périodique de période p.p.c.m. (k, k').

La notion de ‹force d'un point d'accumulation› que nous définissons maintenant a pour but de mesurer le nombre moyen de retours de la suite (x_n) au voisinage d'un point d'accumulation donné.

Définition. *Soit* (x_n) *une suite de l'espace métrique* (E, d), *soit* $y\in E$. *On appelle force de* y *par rapport à* (x_n) *le nombre réel:*

$$\alpha(y,(x_n)) = \lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{m\to+\infty} \inf \text{cardinal}\, \{n \mid n\in\{0,1,\ldots,m-1\}\; d(y,x_n)\leqq\varepsilon\}/m.$$

En posant

$$N_m^{\varepsilon} = \text{cardinal}\, \{n \mid n\in\{0,1,\ldots,m-1\}\; d(y,x_n)\leqq\varepsilon\}/m,$$

$$N^{\varepsilon} = \lim_{m\to\infty} \inf N_m^{\varepsilon}.$$

On a $0 \leqq N_m^\varepsilon \leqq 1$, *donc* $0 \leqq N^\varepsilon \leqq 1$ *et donc* $0 \leqq \alpha(y, (x_n)) \leqq 1$ *de plus:*

$$\varepsilon' \leqq \varepsilon \Rightarrow N_m^{\varepsilon'} \leqq N_m^\varepsilon$$

et donc:

$$\varepsilon' \leqq \varepsilon \Rightarrow N^{\varepsilon'} \leqq N^\varepsilon.$$

Propriétés. i) Si (x_n) converge vers y alors

$$\alpha(y, (x_n)) = 1,$$
$$\forall z \neq y: \alpha(z, (x_n)) = 0.$$

ii) Si $\alpha(y, (x_n)) > 0$ alors y est point d'accumulation de la suite (x_n) et:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \exists p_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall p \geqq p_0: \{x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{p^2-1}\} \cap B(y, \varepsilon) \neq \emptyset.$$

iii) Si (x_n) est pseudo-périodique de période k et admet k points d'accumulation distincts $y_1, y_2, \ldots, y_k$ alors:

$$\alpha(y_1, (x_n)) = \alpha(y_2, (x_n)) = \ldots = \alpha(y_k, (x_n)) = \frac{1}{k}.$$

iv) Si (x_n) est presque pseudo-périodique de constante k alors chacun de ses points d'accumulation vérifie:

$$\alpha(y, (x_n)) \geqq \frac{1}{k}.$$

v) Si $(y_i)_{i \in I}$ désigne la famille (finie ou infinie) des points d'accumulation de la suite (x_n) alors:

$$0 \leqq \sum_{i \in I} \alpha(y_i, (x_n)) \leqq 1.$$

Démonstration. i) Soit $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que:

$$m \geqq n_0 \Rightarrow d(x_m, y) \leqq \varepsilon.$$

Donc pour $m \geqq n_0$ on a:

$$\frac{m - n_0}{m} \leqq N_m^\varepsilon \leqq 1.$$

Ce qui implique pour tout $\varepsilon > 0$: $N^\varepsilon = 1$, et donc: $\alpha(y, (x_n)) = 1$. Un raisonnement analogue permet d'établir que:

$$z \neq y \Rightarrow \alpha(z, (x_n)) = 0.$$

ii) Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que:

$$\forall p_0 \in \mathbb{N}, \quad \exists p \geqq p_0: \{x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{p^2-1}\} \cap B(y, \varepsilon) = \emptyset.$$

On peut donc construire une suite strictement croissante d'entiers p_n telle que:

$$\{x_{p_n}, x_{p_n+1}, \ldots, x_{p_n^2-1}\} \cap B(y, \varepsilon) = \emptyset$$

ce qui implique:

$$N^{\varepsilon}_{p_n^2} \leq \frac{p_n}{p_n^2}$$

donc: $N^{\varepsilon}=0$, donc: $\alpha(y,(x_n))=0$.

La propriété démontrée implique en particulier que tout voisinage de y contient une infinité de (x_n) et donc que y est un point d'accumulation de (x_n). Les propriétés iii), iv) et v) se démontrent par des méthodes analogues.

Remarque 1. Il n'est pas vrai que si y est un point d'accumulation de (x_n) alors $\alpha(y,(x_n))>0$.

Soit en effet la suite $(0,1,0,0,1,0,0,0,1,\ldots)$ on établit sans peine que

$$\alpha(0,(x_n))=1,$$
$$\alpha(1,(x_n))=0.$$

Remarque 2. La deuxième inégalité de v) peut être une inégalité stricte (même quand il n'y a qu'un nombre fini de points d'accumulation): pour la suite $(0,1,1,0,0,0,0,1,1,1,1,1,1,1,1,0,0,\ldots)$ on a:

$$\alpha(0,(x_n))=\alpha(1,(x_n))=\tfrac{1}{3}.$$

Il est même possible que la première inégalité soit une égalité:

pour la suite $(0,1,0,1,2,0,1,2,3,\ldots)$ dont la famille des points d'accumulation est $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha(n,(x_n))=0.$$

Références

1. Bertier, P., Bouroche, J.M.: Analyse des données multidimensionnelles. Paris: Presses Universitaires de France 1975
2. Brezinski, C.: Accélération de la convergence en analyse numérique. Cours du D.E.A, Lille 1973
3. Delahaye, J.P.: Quelques problèmes posés par les suites de points non convergentes et algorithmes pour de telles suites. Thèse de 3e cycle, Lille 1979
4. Delahaye, J.P.: Expériences numériques sur les algorithmes d'extraction pour suites non convergentes. Pub. ANO n° 5, Lille, Avril 1979
5. Denel, J.: Extensions of the continuity of point-to-set maps: applications to fixed point algorithms. Mathematical Programming Study **10**, 48–68, 1979
6. Eaves, B.C.: Computing Kakutani Fixed Points. SIAM J. Appl. Math. **21**, 236–244 (1971)
7. Fiorot, J.C., Huard, P.: Composition and union of general algorithms of optimization. Mathematical Programming Study n° 10, 69–85, 1979
8. Germain-Bonne, B.: Estimation de la limite de suites et formalisation des procédés d'accélération de convergence. Thèse, Lille, 1978
9. Huard, P.: Optimisation dans $\mathbb{R}^n - 2^{\text{ème}}$ partie: Algorithmes généraux. Polycopié, Lille 1972
10. Huard, P.: Optimization algorithms and point-to-set maps. Mathematical Programming Study **8**, 308–331, 1975
11. Huard, P.: Extensions of Zangwill's theorem. Mathematical Programming Study **10**, 98–103, 1979
12. Kakutani, S.: A generalization of Brouwer's fixed point theorem. Duke Math. J. **8**, 457–459 1941
13. Metcalf, F.T., Rogers, T.D.: The cluster set of sequence of successive approximation. J. Math. Anal. Appl. **31**, 206–212, 1970
14. Polak, E.: Computational methods in optimization: A unified approach. New York: Academic Press 1971
15. Sarkowski, A.N.: Attracting and attracted sets. Soviet Math. Dokl. **6**, 268–270, 1965
16. Zangwill, W.I.: Nonlinear programming: A unified approach. Englewood Cliffs: Prentice Hall 1969

Reçu le 12 Juillet 1979