17

Le réalisme en mathématiques et en physique

Physiciens et mathématiciens croient à l'existence d'une réalité indépendante de nos observations et ils ont le sentiment que l'abandon du réalisme remettrait en question la valeur de la science. Cependant, parfois les progrès scientifiques limitent autant la compréhension de la réalité qu'ils la précisent.

Le réalisme est la croyance qu'il existe quelque chose – le réel – indépendant de nous, et que ce réel subsiste lorsque nous cessons de l'observer. Or la remise en question, par la mécanique quantique et la logique mathématique, du concept de réalité indépendante est aussi étonnante que radicale ; même si l'on peut croire que cette mise en cause n'est ni définitive ni absolue, et même si la conclusion est que le réel existe mais ne peut être connu, la thèse réaliste est affaiblie. Or la position philosophique «réaliste» soutient la pensée scientifique et sert de garde-fou contre des déviances qui mettraient en péril les constructions de la science.

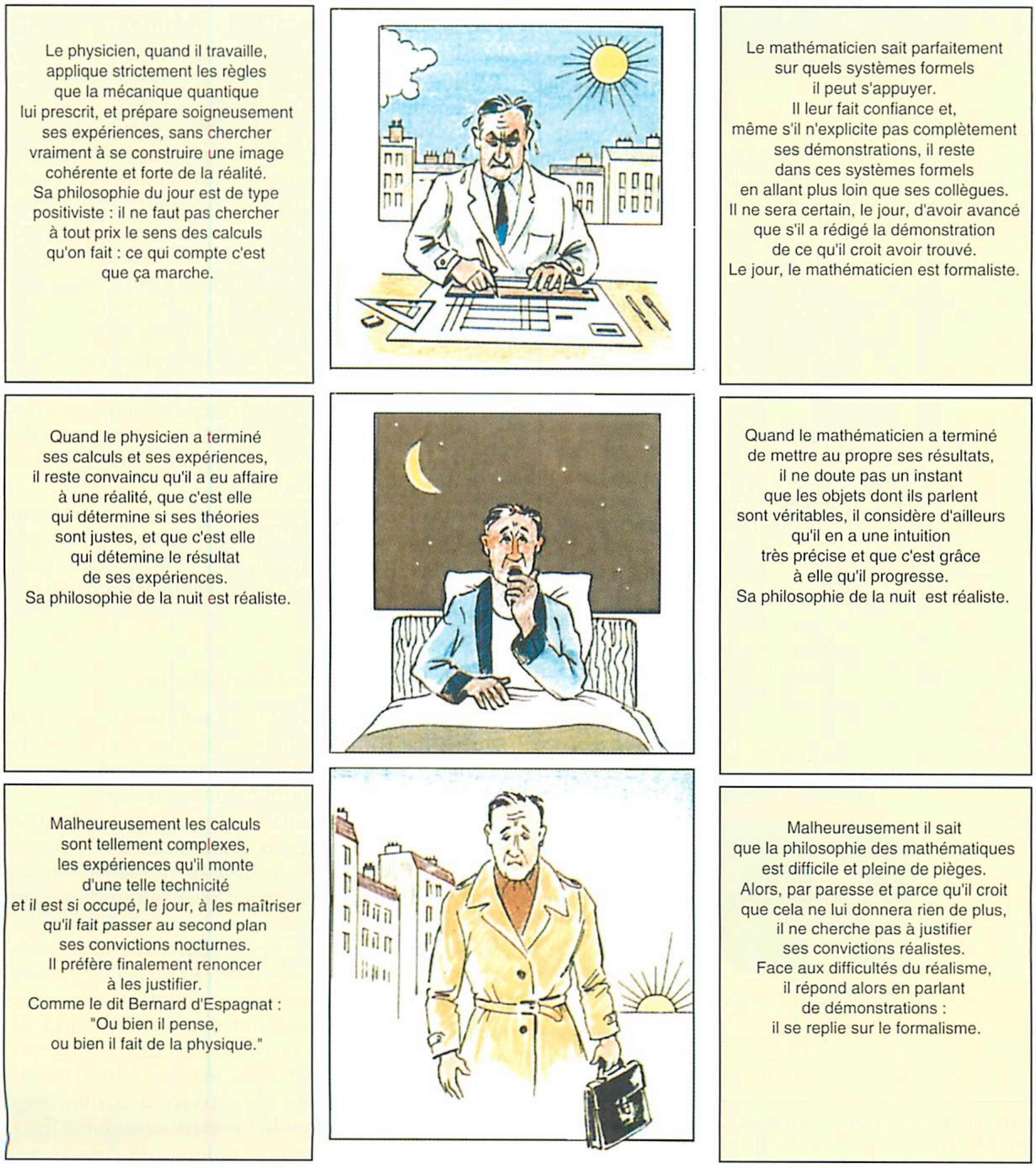
Seule la croyance en un réel indépendant de nous assure qu'il y a connaissance véritable, affirme le réaliste. La négation du réalisme, ou bien nous conduit à la position solipsiste (seul le Moi existe) logiquement cohérente mais stérile, ou bien nous interdit toute interrogation sur ce qui pourrait expliquer la convergence et l'unité de nos expériences sensibles. Si les mathématiques ne fournissaient pas la connaissance d'une réalité hors de nous, l'efficacité de leur application – en particulier en physique – serait miraculeuse. Si les mathématiques sont universelles, c'est parce qu'elles ne dépendent pas de l'individu, et si l'on ne peut inventer n'importe quel théorème, c'est qu'il existe une réalité contraignante hors de l'homme. La difficulté c'est d'avoir accès à cette réalité : le principe d'incertitude de Heisenberg pour un physicien réaliste, le théorème d'incomplétude de Gödel pour un mathématicien réaliste, établissent une sorte d'inconnaissabilité fondamentale.

Le réalisme en physique

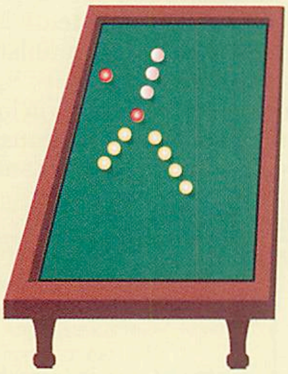
Le réalisme atomique, ou microréalisme, repose sur un credo : l'étude assez fine du monde physique amènera la découverte de particules ultimes qui constituent les objets de base de la physique, particules dont la combinatoire permettra de rendre compte complètement de ce qui existe. Or la mécanique quantique a montré que s'il y a des objets de base du monde physique, ceux-ci n'ont pas les propriétés et le comportement des objets macroscopiques habituels (les objets quantiques ne sont, par exemple, ni ondes ni particules) ; aussi le microréalisme naïf est-il exclu, aussi la situation épistémologique du réalisme est-elle devenue très délicate. Pour rétablir la réalité des objets de la mécanique quantique, des physiciens ont supposé que des variables cachées déterminaient les caractéristiques (position, masse, vitesse, spin) des particules en l'absence de toute observation. Toutefois, ces formulations sont arbitraires : on ne peut les départager par des expériences et elles surdéterminent le réel ; de plus ces variables cachées ne sont pas locales, c'est-à-dire ne sont pas associées individuellement aux particules mais à tout l'espace, comme les expériences d'Alain Aspect l'ont démontré.

Moins ambitieux parce que moins définitif, le réalisme abstrait soutient que la réalité du monde ne se réduit pas à des entités simples que l'on peut fixer *a priori* et définitivement : pour déterminer les entités de base, prônent les réalistes abstraits, il nous faut utiliser tous les moyens rationnels disponibles, dont, bien sûr, les mathématiques.

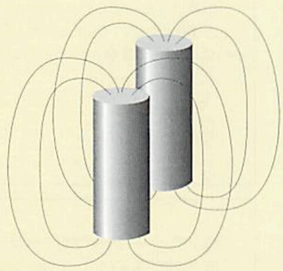
Les tenants du réalisme abstrait, disciples d'Einstein et de Louis de Broglie, hésitent à affirmer la possibilité de compréhension du monde physique par l'homme, mais au fond ils croient en cette possibilité. Malheureusement, aussi imprécise que soit sa définition, le réalisme abstrait est aussi bousculé par les résultats de la mécanique quantique. Si la mécanique quantique est correcte et complète (si elle décrit toute la réalité), alors il faut accepter un indéterminisme fondamental (et pas seulement subjectif). Si la mécanique quantique est correcte, alors la loi de séparabilité forte, affirmant que tout dans l'univers est localisé et qu'aucun rapport instantané n'est



1. Philosophies du jour et de la nuit.



DANS LE RÉALISME LE PLUS NAÏF EN PHYSIQUE, TOUT EST MATIÈRE ET CHOCS



LE RÉALISME CLASSIQUE DE LA MATIÈRE ET DES CHAMPS RAMÈNE TOUT À DE LA MATIÈRE ET À DES CHAMPS.

$$\frac{h^2}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{d^2y}{dy^2}+\frac{d^2y}{dz^2}\right)+V(x,v,z)=Ey$$

LE RÉALISME ABSTRAIT AFFIRME QUE LE MONDE PHYSIQUE PEUT SE RÉDUIRE À CERTAINES STRUCTURES MATHÉMATIQUES QUI, MÊME SI ELLES SONT DIFFICILES À IMAGINER, CONSTITUENT LE RÉEL PHYSIQUE QUE NOUS FINIRONS PAR CONNAÎTRE ET COMPRENDRE.

LE RÉALISME DE PRINCIPE, OU RÉALISME LOINTAIN, SOUTIENT QU'IL Y A UN RÉEL PHYSIQUE, MAIS DOUTE QUE CELUI-CI SOIT COMPRÉHENSIBLE COMPLÈTEMENT

2. DU MATÉRIALISME NAÏF de Descartes, où tout n'est que matière et chocs, aux théories d'aujourd'hui, l'histoire de la physique apparaît comme un recul progressif et inéluctable du réalisme.

possible entre des entités séparées, est violée : pour deux photons issus d'une source unique dans un état dit corrélé, une mesure sur l'un des deux détermine instantanément l'état de l'autre même si les deux photons sont très éloignés ; en revanche le monde réel décrit par la relativité est tel qu'aucun signal ne peut se propager plus vite que la vitesse de la lumière. Cette contradiction apparente entre la localité de la relativité et la non-localité de la mécanique quantique est plus facile à accepter pour les philosophes positivistes, qui ne s'interrogent pas sur les conséquences des calculs, que pour les réalistes.

Nous distinguerons toutefois le réaliste abstrait qui ne renonce pas à comprendre, du réaliste de principe. Ce dernier est prêt à admettre une impuissance fondamentale et doute très fortement qu'une compréhension définitive soit possible. Le réaliste de principe ou réaliste lointain pense qu'il y a un réel, mais qu'aujourd'hui, nous sommes dans l'impossibilité de le comprendre. Bernard d'Espagnat a exprimé en détail cette thèse et les raisons qu'il a de l'adopter : cette version «déprimée» du réalisme abstrait est peut-être la dernière position qu'on puisse rationnellement adopter, ce qui ne semble pas être le cas du réalisme arbitraire et surdéterminant des variables cachées non locales.

Inutile, quasi contradictoire, arbitraire, non testable et surdéterminé, le réalisme en physique est en position bien faible. Or tous ces mots peuvent également qualifier le réalisme en mathématiques...

Le réalisme en mathématiques

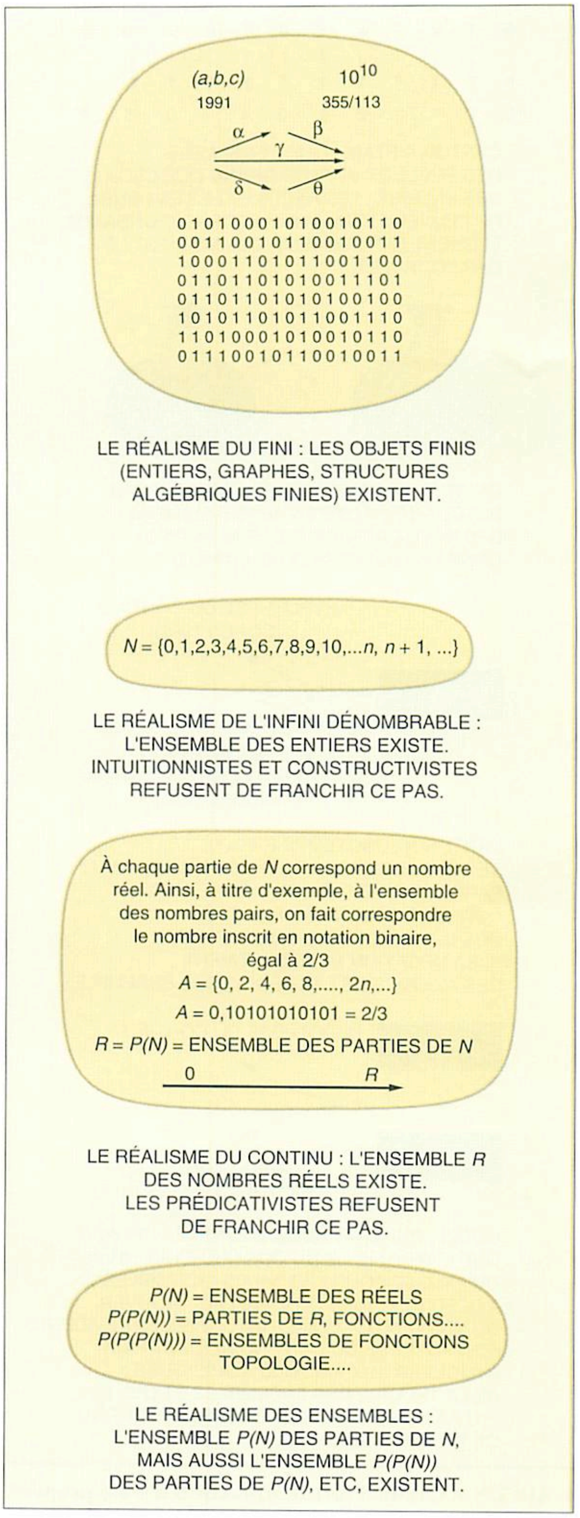
En philosophie des mathématiques, presque toutes les thèses contiennent des éléments de réalisme ; elles se distinguent par l'étendue et par l'abstraction du réel indépendant postulé.

Les réalistes finitistes admettent la réalité des objets finis : pour eux, l'équation «2 + 3 = 5» est l'énoncé d'une vérité portant sur les objets ou les manipulations sur des objets ; cette relation nous enseigne quelque chose sur une réalité, atemporelle et indépendante des mathématiciens. Seuls certains intuitionnistes pensent qu'un tel énoncé n'a de sens que pour celui qui l'élabore et que les nombres sont uniquement des constructions de l'esprit humain, sans réalité en dehors du cerveau. Pratiquement tous les mathématiciens attribuent une forte objectivité aux nombres entiers (pris individuellement) et aux objets finis combinatoires comme les chaînes de caractères, les tableaux finis de nombres, les graphes...

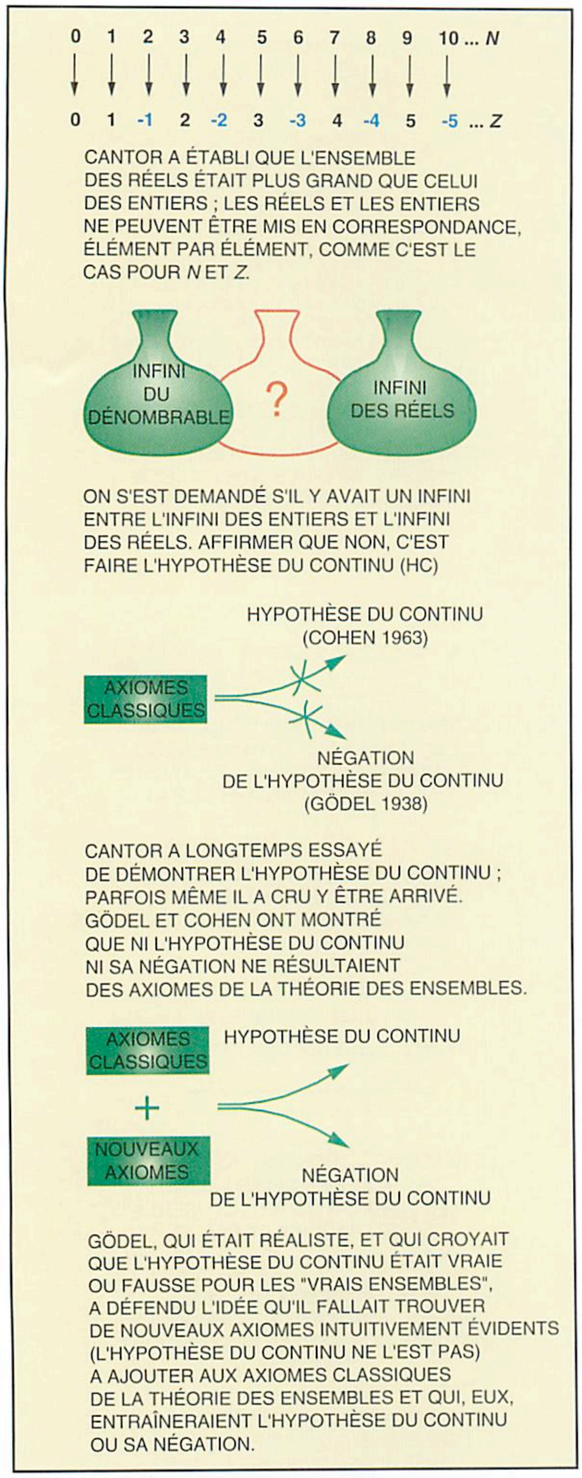
Ce réalisme finitiste sert de base au formalisme qui est l'«idéologie» de recours de beaucoup de mathématiciens ; refusant de considérer qu'il existe une réalité mathématique plus abstraite que la réalité finie, ou considérant que l'extension du réalisme aux objets infinis est dangereuse et incertaine, le réaliste finitiste propose de se limiter à l'univers évident des objets finis. Cette position est renforcée par le fait que, moyennant des conventions syntaxiques adéquates, toutes les démonstrations peuvent se ramener à des manipulations de symboles. Le sens réel d'un théorème sur les nombres complexes par exemple, n'est pas que telle ou telle propriété est vraie pour les objets dont parle le théorème, mais simplement qu'il est possible, à partir des axiomes et en respectant des règles de manipulation bien définies, de produire une certaine configuration de signes qui est l'énoncé du théorème. Même si les mathématiciens n'écrivent pas explicitement leurs démonstrations dans les langages que propose la logique, ils savent que cela est possible.

Cependant, cette formalisation, l'ultime recours quand le mathématicien s'interroge sur la justesse d'une démonstration, n'épuise pas, c'est évident, le sens des théorèmes : aussi considère-t-on que le formalisme est une philosophie insuffisante des mathématiques et désire-t-on aller plus loin et passer à un réalisme moins limité incluant l'infini, en premier lieu l'infini des nombres entiers appelé infini dénombrable.

En passant du réalisme finitiste au réalisme du dénombrable, on franchit un pas qui n'est pas petit, et les intuitionnistes s'y refusent. La difficulté de cette généralisation est qu'à tout problème concernant tous les nombres entiers ne correspond pas nécessairement une méthode connue de résolution. Lorsque l'on affirme que $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 1\,024$, on sait comment s'y prendre pour le vérifier ou s'apercevoir que c'est faux, c'est-à-dire que l'on connaît une procédure finie qui nous dit si oui ou non l'égalité en question est vraie (il suffit d'effectuer les multiplications complètement). En revanche pour l'énoncé : «Il y a une infinité de nombres n tels que n et $n + 2$ sont premiers», on ne voit pas, *a priori*, comment s'y prendre pour en connaître la vérité à l'aide d'un nombre fini de calculs. On peut toutefois imaginer une procédure infinie qui «après avoir essayé tous les nombres premiers n» réponde oui ou non. La possibilité de cette procédure nous rassure et nous donne à penser que l'énoncé est vrai ou faux.



3. DANS CETTE ÉVOLUTION des différents réalismes en mathématiques, plus on enrichit le réel des concepts utilisés par les mathématiciens, plus les difficultés d'argumentation pour soutenir le réalisme sont grandes.



4. AUCUN AXIOME VRAISEMBLABLE n'a été proposé, malgré les très importants efforts des logiciens depuis 40 ans, qui implique l'hypothèse du continu ou sa négation. Cet échec fait douter de la réalité du monde des ensembles : pourra-t-on jamais dire si l'hypothèse du continu est vraie ou fausse?

Cependant, comme cette procédure est impraticable, la croyance que nous pourrons décider de la vérité de l'énoncé est moins assurée que lorsqu'il s'agit de l'énoncé portant sur les puissances de 2. Il y a là un pas réaliste à franchir, celui du fini à l'infini dénombrable : il faut passer de la réalité des nombres pris individuellement à la croyance de la réalité des nombres comme ensemble infini. Ce pas, la plupart des mathématiciens le font sans hésitation, et pourtant certains résultats de logique exposés plus loin vont à l'encontre de cet enrichissement naturel.

Cantor s'est aperçu que l'infini ne se réduisait pas à l'infini des nombres entiers et il a établi que l'infini des points d'une droite ou des points de l'espace était d'une nature plus riche, qu'on ne pouvait ramener à l'infini des nombres entiers. Cet infini de la géométrie et de l'analyse, les mathématiciens n'ont pas attendu Cantor pour en parler et le manipuler avec rigueur, mais c'est seulement au XIX^{e} siècle qu'ils ont pris l'habitude de le considérer vraiment comme une totalité présente et non plus seulement comme une potentialité. Là encore le pas à franchir est délicat car le réalisme du continu, plus encore que le réalisme du dénombrable, est risqué. Nous verrons que les résultats de la logique posent des questions graves aux mathématiciens prêts à admettre ce continu comme ayant une existence véritable indépendante de ce qu'on en fait. Notons déjà que le physicien utilise quotidiennement ce continu, mais prudemment, sans jamais chercher de réponse à la question : «Y a-t-il vraiment dans la nature un infini non dénombrable?». Il considère sans doute cette question – mais pourquoi donc? – comme n'ayant pas de sens physique.

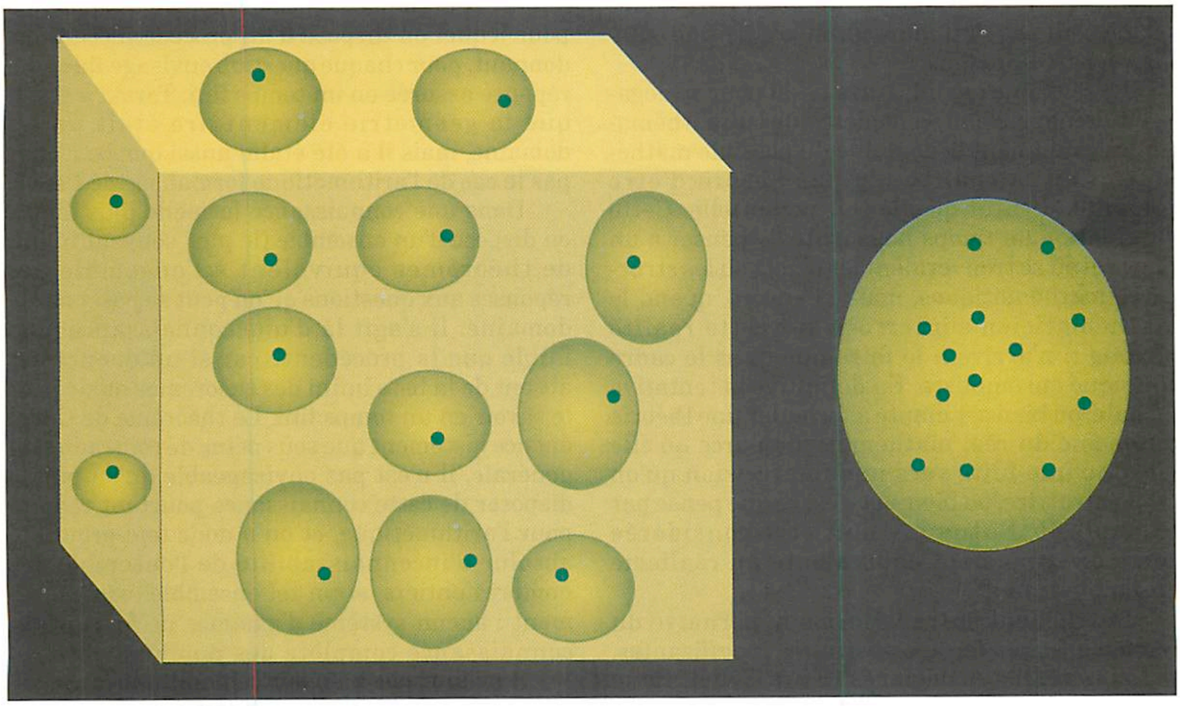
Au-delà du continu, Cantor a aussi montré qu'il y a d'autres infinis. Son travail a conduit à la formulation, par Zermelo en 1908, de la théorie des ensembles qui, après quelques difficultés, est devenue un cadre général pour faire des mathématiques : tout en mathématiques peut se réduire à des ensembles et l'usage, aujourd'hui, est effectivement de tout réduire aux ensembles. Cet univers des ensembles dans lequel on représente sans difficulté celui des nombres entiers, celui du continu, celui des fonctions, celui des espaces de dimension quelconque, etc., semble être aussi réel que l'univers des objets finis ou que l'ensemble des nombres entiers ; l'attitude naturelle de tous les mathématiciens est d'en parler entre eux comme s'il existait. Ce réalisme ensembliste naturel est lui aussi mis en péril par les résultats des logiciens : rares sont les mathématiciens qui l'adoptent sans nuance.

Cette classification des réalismes par univers croissants est relativement indépendante d'une autre classification procédant, elle, par abstraction croissante (et qui associée à la première classification, donne ainsi lieu à un grand nombre de combinaisons possibles) ; elle commence avec ce qu'on appelle le réalisme naïf parfois qualifié de platonicien. Celui-ci consiste à croire en l'existence même des objets mathématiques : quelque part il y aurait les triangles, les matrices, les fonctions continues, les ensembles, etc. Ce réalisme naïf rencontre des difficultés évidentes qui font qu'on évite en général de le formuler aussi brutalement : s'il y a une réalité des nombres, celle-ci n'est pas de même nature que la réalité des pommes ou des mètres de tissus qu'elle permet de compter ; on ne. peut pas saisir les nombres, ni les voir. Il faut se dégager au moins un peu de l'idée que nous avons du réel physique, il faut concevoir et admettre un autre type de réel.

Le réalisme des structures

On souhaite affirmer l'objectivité des mathématiques, c'est-à-dire d'une détermination en dehors de notre esprit qui fixe la vérité ou la fausseté des énoncés mathématiques : la vérité mathématique préexiste aux questions que nous pouvons nous poser sur elle. Cette vérité concerne les lois mathématiques (les théorèmes) : une idée naturelle est alors de dire que les nombres n'existent que par les rapports qu'ils ont entre eux et qu'il en va de même pour tous les êtres mathématiques.

Cette façon de penser la réalité mathématique, non plus comme naïvement présente, mais comme système de relations, constitue ce qui peut s'appeler le réalisme des structures, dont il existe diverses versions. L'une d'elles est fondée sur des notions axiomatiques et affirme que les objets mathématiques sont les structures qu'on peut définir par des systèmes



5. L'AXIOME DU CHOIX : si *E* est un ensemble d'ensembles (une boîte de boîtes), alors en choisissant un élément dans chaque ensemble, je peux constituer une nouvelle boîte. Le problème avec l'axiome du choix c'est qu'il a des conséquences (avec les ensembles infinis) qui sont contraires à l'intuition. Par exemple l'axiome du choix implique que l'ensemble des nombres réels peut être ordonné de telle façon que toute partie de l'ensemble des nombres réels possède un plus petit élément (l'ordre habituel sur l'ensemble des nombres réels n'est pas un bon ordre, car l'intervalle]0,1] n'a pas de plus petit élément). Personne n'a jamais pu exhiber un tel bon ordre, et on sait aujourd'hui qu'on ne pourra jamais en construire explicitement. La question «les vrais ensembles satisfont-ils l'axiome du choix?» ne peut donc recevoir aucune réponse intuitivement satisfaisante. De plus on sait qu'ajouter l'axiome du choix ou ajouter sa négation au système formel de la théorie des ensembles n'entraîne pas de contradiction dans cette théorie, s'il n'y en a pas déjà. Les vrais ensembles vérifient-ils l'axiome du choix oui ou non? Voilà une des difficiles questions auxquelles un réaliste doit répondre.

d'axiomes, et qu'il n'y a pas de différence entre des structures isomorphes ; la théorie des modèles sert alors de base à cette forme abstraite de réalisme.

Une autre version s'appuie sur la notion de catégorie : la vraie nature des mathématiques est ce jeu entre les morphismes, objets finaux, initiaux, produits, etc., qui est indépendant de la réalisation «matérielle» des objets, que l'on construit avec des nombres ou des ensembles quand on veut des exemples. Dans ces réalismes des structures, nous avons éliminé la réalité individuelle des objets mathématiques tout en admettant la réalité des rapports qu'ils entretiennent entre eux ; malheureusement nous pensons en objets et, dès que nous cherchons à donner un peu de cohérence à ces réalismes abstraits, nous introduisons des objets. Aussi ces réalismes tentent l'impossible pari de fonder une réalité sans substance et en définitive n'y parviennent pas : les systèmes d'axiomes, les modèles, les catégories portent sur les objets qu'il faut bien définir quelque part, car comme le dit Jean Largeault : «on ne peut pas s'attendre à voir croître une ontologie à partir de rien».

Le réalisme modal, autre essai pour se dégager du réalisme naïf, considère que les mathématiques examinent le domaine du possible mathématique : la réalité n'a pas besoin d'être présente, il suffit qu'elle soit potentielle. Cette élimination du temps nous évite de penser à un lieu réel où se trouveraient les objets ou les structures mathématiques, mais là encore, quand le mathématicien s'interroge sur cette réalité modale il n'arrive à le faire que dans le cadre classique ensembliste. En définitive la tentative modale, ou bien est inapte à formuler une théorie autonome du réel mathématique parce qu'elle n'est qu'une fuite vers une imprécision qu'on croit salvatrice, ou bien – et c'est ce que pense par exemple H. Putnam – doit être considérée comme simplement équivalente au réalisme ensembliste naïf.

Finalement entre la forme hypernaïve du réalisme, et ses formes abstraites insuffisantes, tous les réalistes déclarés (Kurt Gödel, René Thom) hésitent et évitent d'être trop précis sur ce qu'est ce réel mathématique. La tentation de faire évoluer le réalisme vers des formes de plus en plus abstraites et imprécises a sans doute son origine dans les difficultés même du réalisme en mathématiques que nous allons détailler maintenant et dont la première est celle, aujourd'hui bien connue, du théorème d'incomplétude de Gödel.

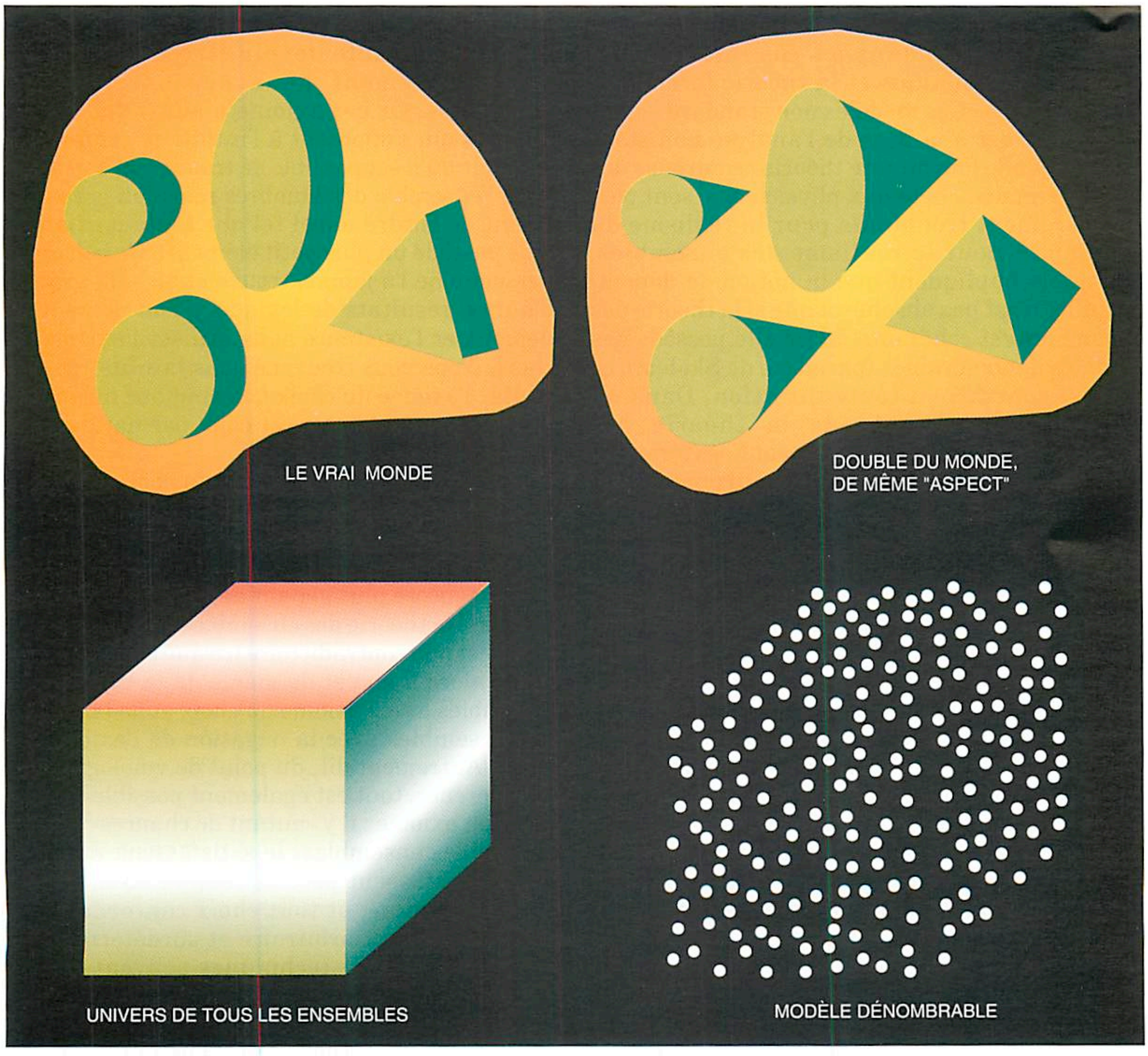
Existence et connaissance

Ce résultat de 1931 énonce, que pour tout système d'axiomes qui n'est pas contradictoire et qui permet de trouver les résultats les plus élémentaires de l'arithmétique, il existe des formules d'arithmétique qu'on ne peut ni démontrer ni infirmer (démontrer leur négation). Le théorème de Gödel a pour conséquence que si l'ensemble des nombres entiers a une réalité bien déterminée alors on ne pourra jamais enfermer sa connaissance dans un nombre fini de règles de calcul : tout système d'axiomes laissera échapper des vérités arithmétiques.

Pour mesurer la force de ce résultat, il est intéressant de distinguer plusieurs types de connaissances formelles. La connaissance formelle la plus complète qu'on puisse avoir d'un domaine c'est la liste exhaustive et finie des énoncés vrais qu'on peut formuler à son sujet. Rares sont les domaines où une telle connaissance est permise ou même envisageable. Légèrement plus faible est la connaissance formelle d'un domaine pour lequel on dispose d'un procédé mécanique donnant, pour chaque question envisageable, une réponse assurée en un temps fini. Tarski a établi que la géométrie élémentaire était un tel domaine, mais il a été établi aussi que ce n'était pas le cas de l'arithmétique formalisée de Peano.

Dans une connaissance formelle plus faible, on dispose d'un ensemble (le plus souvent infini) de théorèmes équivalent à l'ensemble des réponses aux questions qu'on peut se poser sur le domaine. Il s'agit là d'une connaissance plus faible que la précédente car si un énoncé est absent de la liste infini des théorèmes on ne peut le savoir en un temps fini. Le théorème de Gödel énonce justement que sous peine de contradiction générale, il n'est pas envisageable qu'on puisse disposer de cette connaissance pourtant réduite pour l'arithmétique, et on a donc une propriété absolue d'inconnaissabilité de l'ensemble des nombres entiers, si un tel ensemble existe vraiment : aucun système d'axiomes ne fournira la connaissance complète des nombres entiers.

Il ne faut pas bien sûr confondre inexistence et inconnaissabilité, mais force est d'admettre que toute réalité dont la connaissance est par principe interdite devient douteuse : c'est en ce sens que le théorème de Gödel est un argument contre le réalisme. Récemment des extensions du théorème de Gödel ont été présentées par G. Chaitin. Elles montrent que cet échec inévitable de chaque système formel à rendre compte des nombres entiers, est en fait encore plus grave que ce qu'on avait imaginé jusqu'à présent : des classes entières d'énoncés possédant un sens très simple (relatif au degré de complexité de suites finies de zéro ou de un, ou relatif au nombre de solutions d'équations élémentaires) échappent inévitablement au pouvoir de tout formalisme. Chaitin, en 1987, a par exemple construit une équation ne faisant intervenir que des nombres entiers qui met au défi tout système formel : cette équation inclut un paramètre n et l'on se demande, pour chaque valeur de ce paramètre, si l'équation a un nombre fini ou infini de solutions. Or un système formel ne peut traiter qu'un nombre fini de cas, et ce nombre est approximativement égal au nombre de symboles nécessaires à le décrire : aucun système d'axiomes ne fait donc mieux que l'énumération bête d'un nombre fini de cas, tout le reste demeurant inconnu, tout le reste étant indécidable. Chaitin a aussi démontré que les énoncés de la forme «l'objet S peut être



6. LE THÉORÈME DE LÖWENHEIM-SKOLEM de la théorie des modèles (une branche de la logique mathématique) entraîne que même si on connaît toutes les phrases vraies qu'on peut énoncer à propos du monde, alors il existe d'autres mondes différents vérifiant les mêmes phrases (et donc semblables en apparence). Cette impossibilité de principe d'atteindre le vrai monde, est, bien sûr, très grave pour un réaliste, car elle fait doumr qu'il y ait quelque chose à atteindre. En théorie des ensembles, le théorème de Löwenheim-Skolem entraîne qu'il existe des modèles dénombrables des axiomes de la théorie des ensembles, et bien que cela ne conduise à aucune contradiction à l'intérieur de la théorie des ensembles, c'est un résultat qui fait douter de la réalité authentique des ensembles non dénombrables, et donc de la réalité du monde des ensembles.

décrit en n symboles et ne peut pas être décrit en moins de n symboles» sont tous des indécidables de Gödel, sauf un nombre fini d'entre eux. Autrement dit aucun système d'axiomes ne traitera bien le problème des descriptions minimales.

Cette première mise en cause du réalisme mathématique est aggravée par une série de résultats en théorie des modèles (les premiers datent de 1915) qui énoncent que si un système d'axiomes du calcul des prédicats possède un modèle (c'est-à-dire une structure satisfaisant tous les axiomes) alors il en a plusieurs, et ces modèles ne sont pas tous isomorphes (c'est-à-dire semblables) dans les cas intéressants comme l'arithmétique et la théorie formalisée des ensembles. Ces modèles non standard – dont l'existence est à la base de l'analyse non standard, laquelle fournit une théorie rigoureuse des infinitésimaux, chers aux physiciens – sont particulièrement troublants pour le réalisme du continu et pour le réalisme des ensembles, puisqu'ils impliquent que la notion de dénombrabilité n'est pas absolue et que si la théorie des ensembles est cohérente, alors elle possède des modèles dénombrables (paradoxe de Skolem), ce qui est contraire à toute intuition. Dans un modèle dénombrable de la théorie des ensembles, les nombres réels sont «extérieurement dénombrables» et intérieurement non dénombrables... La situation est pour le moins inconfortable. Le philosophe américain H. Putnam, à la suite de W. Quine, considère que les questions posées par ces théorèmes de la théorie des modèles sont parmi les plus importants de la philosophie du XX^e^ siècle.

La question des axiomes de la théorie des ensembles pose des problèmes encore plus graves au réalisme. La théorie des ensembles joue en effet un rôle tout à fait particulier en philosophie des mathématiques : les ensembles sont des briques élémentaires et les opérations de base qu'on peut faire avec elles permettent d'assembler toutes les structures qu'on souhaite. Finalement la version actuelle du réalisme platonicien se limite bien souvent à la croyance en une existence véritable des ensembles et tout argument contre le réalisme ensembliste est, à la lumière des mathématiques contemporaines, un argument général contre le réalisme mathématique. Qu'il soit impossible de trouver un système formel exprimant complètement les propriétés de l'univers des ensembles, cela résulte du théorème de Gödel. Une certaine inconnaissabilité irréductible touche donc déjà la théorie des ensembles. Mais les problèmes posés par l'axiome du choix, l'hypothèse du continu, et divers autres axiomes rendent cette inconnaissabilité encore plus grave et énigmatique.

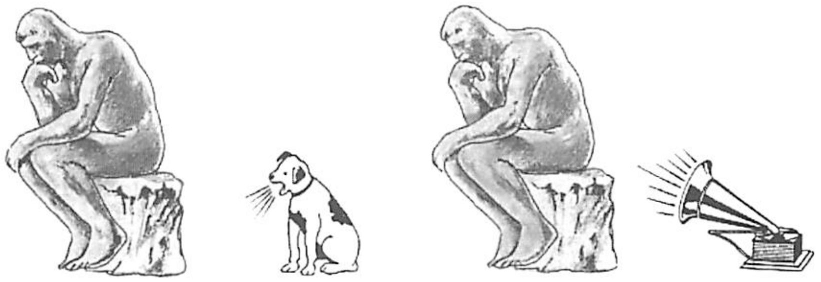
L'axiome du choix

Présentons le problème à propos de l'axiome du choix. Cet axiome indique qu'à chaque fois qu'un ensemble E d'ensembles non vides est donné, on peut choisir un élément dans chacun d'eux et les regrouper en un nouvel ensemble dont l'axiome affirme l'existence. Énoncé sous cette forme, cet axiome semble évident, c'est-à-dire qu'il semble devoir être vérifié parce qu'intuitivement nous pensons être les ensembles. Or cet axiome a aussi des conséquences qui s'opposent à l'intuition, comme par exemple qu'il est possible de trouver un bon ordre pour l'ensemble des nombres réels (un ordre différent de l'ordre usuel tel que toute partie non vide possède un plus petit élément). Ce bon ordre personne ne l'a jamais trouvé et on sait, grâce à d'autres résultats de logique, qu'on ne peut en démontrer l'existence sans utiliser l'axiome du choix. Nous nous trouvons dans la situation suivante : l'axiome du choix nous indique qu'un certain objet existe, mais cet objet par nature n'est pas constructible.

Faut-il admettre l'axiome du choix ou faut-il ne pas l'admettre? En langage réaliste : les ensembles véritables vérifient-ils l'axiome du choix ou ne le vérifient-ils pas? Le problème est devenu encore plus gênant depuis qu'il a été établi que si la théorie des ensembles sans axiome du choix est non contradictoire (ce que tout le monde croit) alors il en est de même de la théorie des ensembles avec l'axiome du choix et de la théorie des ensembles avec la négation de l'axiome du choix. Autrement dit, du point de vue logique de la cohérence, tout est également possible concernant cet axiome : il y «autant de chances» que les «véritables ensembles» le satisfassent, ou qu'ils ne le satisfassent pas. Le réel, là aussi, serait sous-déterminé, et tout choix concernant cet axiome apparaît arbitraire et surdéterminant.

Ces difficultés techniques peuvent laisser indifférent, mais ce n'est pas le cas de ce qu'on appelle le problème de l'accès. Alors qu'en physique entre deux théories concurrentes, l'expérience nous permet – *in fine* – de choisir, en mathématiques, mis à part les très rares situations où une théorie se trouve être contradictoire, on se demande ce qui doit déterminer nos choix. Soutenir comme le fait K. Gödel que notre intuition est ce moyen ultime qui nous donne accès à la réalité mathématique est assez difficile : comment se ferait ce contact entre le monde physique et le monde réel des mathématiques qui permettrait à notre intuition de «percevoir» ce réel? Cette théorie de la connaissance reste entièrement à formuler et ce que nous savons aujourd'hui du cerveau et plus généralement de la physique et de la chimie n'offre pas les éléments nécessaires à la constitution d'une théorie de l'intuition mathématique.

Cette absence de théorie réaliste de la connaissance en mathématiques, associée à l'argument de l'inutilité scientifique du réalisme et aux arguments techniques mentionnés plus haut, permet de reprendre les mots que tout à l'heure nous appliquions au réalisme en physique : le réalisme en mathématiques apparaît inutile, quasi contradictoire, arbitraire, surdéterminant, non testable.



7. LE RÉALISTE, s'il croit qu'il y a une réalité derrière lui qui produit les aboiements, peut faire l'hypothèse qu'il y a un chien ou faire l'hypothèse qu'il y a un appareil produisant un bruit. Pour lui la réalité est sous-déterminée. S'il choisit de dire qu'il y a un chien, il fait un choix arbitraire – rationnellement injustifiable – et il surdétermine la réalité, car, par principe, il est dans l'impossibilité de prouver l'image qu'il propose du monde. Le physicien quantique est exactement dans cette situation : les théories à variables cachées sont arbitraires et surdéterminantes, elles postulent des entités introuvables et improuvables. En mathématiques, avec l'axiome du choix ou l'hypothèse du continu, la situation est analogue. Le réaliste qui pense que le monde des ensembles existe est dans l'impossibilité de choisir : il est arbitraire de croire que l'hypothèse du continu est vraie, il est arbitraire de croire qu'elle est fausse.

Réalismes en mathématiques et en physique

La situation n'est pas la même en mathématiques et en physique, car bien sûr les deux disciplines fonctionnent de manière radicalement différente, et cela en dépit de ceux qui parlent de l'empirisme des mathématiques ou qui voudraient appliquer aux mathématiques les vues «socio-épistémologiques» auxquelles on a récemment tenté de réduire l'épistémologie de la physique (l'étude sociologique des acteurs de la science n'est pas l'épistémologie). Cependant, en physique comme en mathématiques, au réalisme naturel qui facilite la pensée, dirige et organise l'imagination, permet les figures et les schémas, sert de base à la communication quotidienne et soutient l'enseignement, s'oppose une pratique formelle, calculatoire et vérificationniste, qui, en physique, s'appelle opérationalisme, instrumentalisme ou positivisme, et qui en mathématiques s'appelle formalisme.

Dans les deux situations, c'est une position de repli facile, qui, parce qu'elle annule les questions de philosophie, séduit le savant. Après tout, puisque la machinerie formelle mise au point par les maîtres fonctionne parfaitement bien, le principal n'est-il pas simplement de la faire tourner?

Toutefois, dans les deux situations, la philosophie officielle n'est même pas, en pratique, complètement acceptée et mise en œuvre. Le physicien proclame l'inséparabilité et, en conséquence, propose de toujours tenir compte des appareils de mesure mais ne le fait pas en pratique, les calculs seraient trop compliqués ; le même physicien accepte de considérer, qu'à grande échelle, la séparabilité est satisfaite, mais il ne le prouve pas et accepte le mystère de cette séparabilité du monde physique ordinaire, alors que la physique fondamentale qui en donne les lois n'est pas séparable.

En mathématiques, le même hypocrisie est quotidienne : la possibilité d'écrire dans un langage entièrement formalisé donnerait le sens véritable des résultats mathématiques, mais personne ne le fait, et personne ne croit d'ailleurs qu'il soit utile de le faire. La position de repli que constitue le formalisme est si difficile à tenir en pratique que nul ne la prend vraiment au sérieux : ce serait trop complexe, cela conduirait à des textes illisibles, cela empêcherait l'intuition de travailler, cela serait absurde !

Réel : définition impossible

En physique, comme en mathématiques, des résultats scientifiques précis rendent impossible une compréhension claire de ce que pourrait être le réel : d'un côté ce sont les expériences de confirmation de la mécanique quantique qui conduisent à admettre une non-séparabilité presque en contradiction avec les principes mêmes de la relativité ; de l'autre, ce sont le théorème de Gödel de

1931, les théorèmes d'indétermination des modèles, les théorèmes de cohérence relative en théorie des ensembles. Une forme de dépit conduit alors à nier l'utilité philosophique du réalisme : les philosophies qui en découlent sont l'instrumentalisme et le positivisme en physique, le formalisme en mathématiques.

L'utilité scientifique du réalisme est aussi niée : les théories réalistes de rechange à variables cachées non locales en physique, et la problématique des axiomes supplémentaires en théorie des ensembles sont regardées avec méfiance. L'inconnaissabilité du réel paraît alors être la conclusion inévitable, à moins qu'on choisisse de se passer de lui.

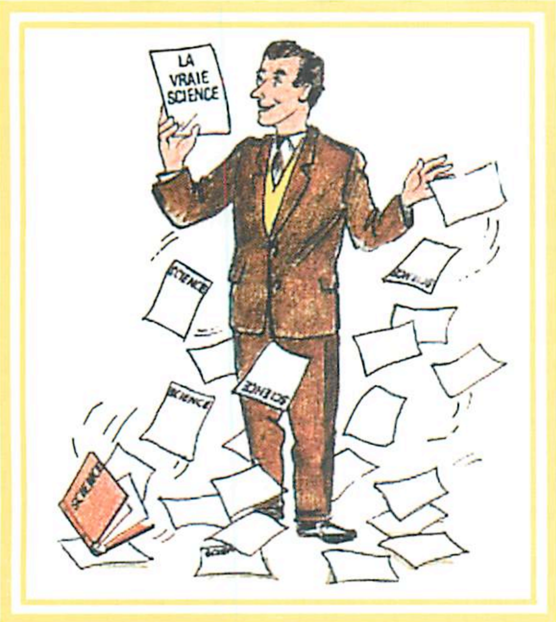
Cette situation conduit les réalistes vers des positions de plus en plus abstraites et imprécises : en physique on en vient à considérer que les objets ne peuvent plus être conçus comme en mécanique classique ou relativiste ; en mathématiques on parle de démontrabilité plutôt que de vérité. Cet inconfort ne satisfait pas tout le monde et quatre grandes figures scientifiques du XX^e^ siècle se sont opposées ou s'opposent franchement au point de vue moyen en proclamant un réalisme fort : A. Einstein, K. Gödel, L. de Broglie et R. Thom. En physique, Einstein a joué un rôle important dans la naissance de la mécanique quantique et donc dans la mise en avant des problèmes du réalisme mais a toujours refusé de croire que la mécanique quantique était complète et s'opposa même à l'idée d'un indéterminisme essentiel. En mathématiques, Gödel a, plus que tout autre, miné la position réaliste ; pourtant il a adopté une position extrême allant jusqu'à postuler un sens mathématique spécial (l'intuition) donnant accès à ce réel si fortement mis en doute par ses propres résultats.

La situation est-elle conjoncturelle? Va-t-on découvrir une façon de penser la mécanique quantique ou une théorie de remplacement qui ne réduise pas le réel à ce quelque chose qui fait que «quand on observe la situation *X* et qu'on fait les calculs *Y* on peut observer *Z* avec la probabilité *W*»? Va-t-on trouver des conséquences inaperçues des axiomes indépendants en théorie des ensembles qui nous conduiront à les ajouter, et ce processus d'addition peut-il se poursuivre indéfiniment? (Le théorème de Gödel nous interdit de penser qu'on aura un jour tous les axiomes qu'il faut.) Ou, pourquoi pas, va-t-on imaginer une nouvelle théorie qui soit capable de supporter toutes les mathématiques et qui ne présente pas les indécisions de la théorie des ensembles?

Positions scientifiques

Les différentes façons de répondre à ces questions définissent quatre types de positions. Il y a d'abord ceux qu'on peut appeler les verrouilleurs totalitaires, qui, pour résoudre les difficultés et permettre un fonctionnement minimal de la science, édictent des décrets violents et limitatifs. C'est la pente naturelle de tous ceux qui ont un domaine riche à déchiffrer, que de nier l'intérêt ou mieux encore la réalité des questions qu'on peut poser par ailleurs ou qui simplement ne se formulent pas en termes normalisés. La tentation est facile de se jeter sur la première solution qui se présente et de s'y accrocher, quel que soit ce qu'on y perd petit à petit, en accumulant ces comportements. De vrais mathématiciens n'ont-ils pas dit à certains moments que la logique ne les intéressait pas et que ses problèmes étaient faux, avant finalement d'admettre qu'elle était un authentique domaine de recherche. Positivisme, instrumentalisme, opérationalisme, formalisme, nominalisme, conventionnalisme, intuitionnisme voilà le nom des doctrines qui tentent d'enfermer, et qui «libèrent» l'esprit sans voir aussi qu'elles bornent ou décapitent même ce sur quoi elles veulent légiférer.

À l'opposé extrême, les partisans du déverrouillage éperdu proposent d'accepter tout, et par là même renoncent au réel. Face aux problèmes graves de la raison, leur attitude est sans doute pire encore que la précédente. En effet, elle interdit toute compréhension renouvelée, toute solution raisonnée, tout progrès et toute refonte. Ce déverrouillage éperdu stipule que, puisque tout n'est pas simple, alors tout est licite : puisque ça résiste, je casse tout, et ce dont j'avais rêvé mais qui n'était pas possible dans l'ancien paysage, je le brandis en prétendant que c'est compatible avec le nouveau ou mieux encore que c'en est une conséquence. Idéalisme, spiritualisme, physique, taoïsme, le nouveau Charon est laxiste : n'importe quelle sottise peut passer à l'Acheron ; à Cordoue, on rêve de petites cuillères et de mécanique quantique, toute pensée peut s'engouffrer là, c'est pourquoi sans doute il n'y a plus de pensée. Remarquons quand même que les mathématiques sont moins hallucinogènes que la physique. Si Cantor est mort fou, il est mort seul, et si l'on fait dire un peu n'importe quoi au théorème d'incomplétude de Gödel, en général cela ne mène pas à la parapsychologie. Bref ceux que la science ennuie parce qu'ils ne la comprennent pas sont prêts à se jeter sur toute crise pour proclamer qu'elle détruit tout ; ils ne voient pas que chaque

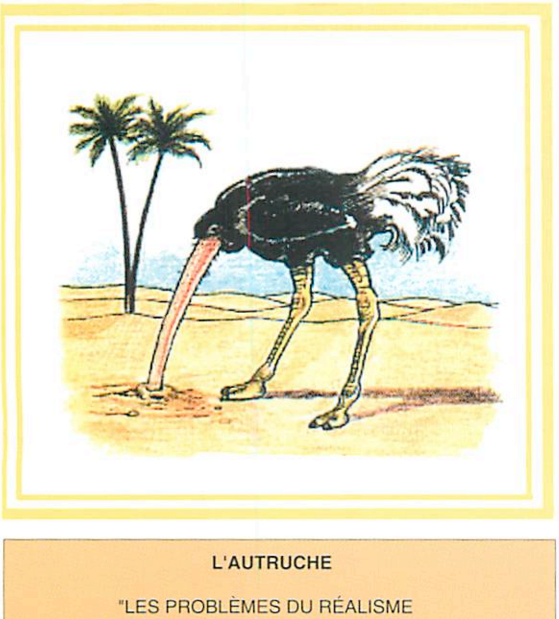


LE VERROUILLAGE

RESTREINT LES OBJECTIFS
DE COMPRÉHENSION ET DE DESCRIPTION
DE LA SCIENCE : POSITIVISME BORNÉ,
OPÉRATIONNALISME, INTUITIONNISME,
FORMALISME STRICT

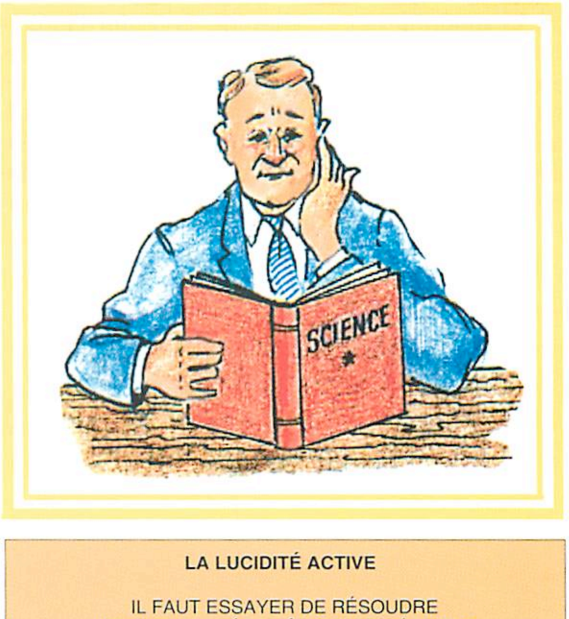
LE DÉVERROUILLAGE

TOUT EST POSSIBLE, Y COMPRIS
LE N'IMPORTE QUOI ET L' ARBITRAIRE.
SPIRITUALISME, PARAPSYCHOLOGIE,
EXCÈS D'INTERPRÉTATION



L'AUTRUCHE

"LES PROBLÈMES DU RÉALISME
NE SONT PAS VRAIMENT GRAVES ;
INUTILE D'EN TENIR COMPTE.
ÇA S'ARRANGERA TOUT SEUL."



LA LUCIDITÉ ACTIVE

IL FAUT ESSAYER DE RÉSOUDRE
LES DIFFICULTÉS, MÊME SI LE RÉALISME
NE PEUT PLUS ÊTRE QU'UN RÉALISME
DE PRINCIPE

8. QUATRE RÉACTIONS possibles aux difficultés du réalisme.

crise, celle-ci ne faisant sans doute pas exception, étend les domaines de validité (la mécanique newtonienne fait toujours tenir les ponts et les démonstrations de Pythagore sont toujours justes) et ne permet pas le retour des vieilles superstitions...

Reconnaissons-le, rares sont les scientifiques qui renoncent ainsi à la science : plus prudents et taciturnes, ils sont plutôt portés vers l'attitude de l'autruche et ils disent : «En fait toutes ces histoires ne sont pas très importantes. Rares sont les zones du savoir scientifique qui sont gênées par les problèmes du réalisme ou, plus précisément, qui n'arrivent pas à le concilier avec la prétention de complétude. La biologie n'a aucun problème de réalisme, la chimie non plus, ni la paléontologie, ni même l'astrophysique et la cosmologie, ni la plupart des branches de la physique. Si la mécanique quantique est plus fondamentale, les difficultés qu'elle éprouve aujourd'hui à s'accorder avec le réalisme (qui partout ailleurs fonctionne si bien) nous montrent que c'est elle qui est étrange. En mathématiques, là encore, le réalisme ne pose un problème que dans de petites zones peu importantes qui ne semblent pas s'étendre. Alors cessons de nous intéresser à ces questions stériles et avançons. À l'avenir, quand des choses que nous ne voyons pas auront surgi, ces problèmes très localisés se résoudront d'eux-mêmes».

Il s'agit d'une attitude délibérée : on veut éviter la «maladie» et on cherche à en nier l'importance pour retourner travailler, l'âme tranquille, aux «vrais problèmes». Certains, et nous en sommes, ne réussissent pas à oublier les difficultés entrevues et ne veulent pas renoncer à la réalité : ils adoptent alors une attitude que nous qualifions de réalisme de principe ou de «réalisme lointain». Leur position consiste à dire que, par principe, il ne peut y avoir de pensée scientifique sans réalisme, tout en admettant qu'il y a de véritables problèmes. Ils refusent de s'enfermer dans une doctrine étroite et refusent aussi de dire que tout est remis en cause. Ils reconnaissent le problème, admettent son importance et savent que les solutions simples ne sont plus possibles. C'est l'attitude des physiciens qui essayent de construire un nouveau réalisme, aujourd'hui plutôt flou, plus négatif qu'affirmatif. L'inconnaissabilité de principe ne peut pas être exclue, c'est peut-être en l'admettant que nous construirons la meilleure position rationnelle, et en mathématiques au moins, il faut considérer qu'elle est définitivement établie. Le réel est nécessaire, mais il semble aussi nécessaire qu'il soit inconnaissable.

Des quatre réactions possibles face aux difficultés du réalisme, la dernière nous semble la meilleure, et si le choix doit se faire entre le monde réduit des calculs, celui des fantasmes des nouveaux irrationalistes, celui de l'incohérente autruche, et celui du réel «inconnaissable par nature», étonné et peut-être déçus, nous optons pour le dernier car nous n'arrivons pas à imaginer le pays de Tlön dont les habitants nous dit J. L. Borges «affirment que l'opération de compter modifie les quantités et les convertit d'indéfinies en définies», où, lorsque «deux personnes cherchent un crayon perdu ; la première le trouve et ne dit rien ; la seconde trouve un deuxième crayon, non moins réel mais plus conforme à son attente» et où «classique est l'exemple d'un seuil qui subsista tant qu'un mendiant s'y rendit et qu'on perdit de vue à la mort de celui-ci».