14
\+ 28
\+ 56
\+ 112
\+ 224
\+ 448
\+ 896
\+ 1792
\+ .....

142857142857l...

1
+2
+4
+8
+16
+32
+64
+128
+256
+512
+1024
+2048
+4096
+8192
+16384
+32768
+.....

...0526315789473684210526315789473684 21

Les nombres infinis vers la gauche

JEAN-PAUL DELAHAYE

A côté des nombres habituels, il existe un autre univers de nombres, celui des nombres décadiques, infinis vers la gauche.

Au mois de septembre, dans la rubrique *Logique et calcul* consacrée à la numérologie, la figure 4 posait deux énigmes mathématiques portant sur d'étranges coïncidences. Nous remercions vivement tous les lecteurs qui nous ont écrit en les priant de nous excuser de ne pouvoir leur répondre individuellement. Certains nous ont suggéré des voies d'attaque, d'autres ont donné des solutions partielles, d'autres enfin ont proposé des solutions parfaites des deux énigmes et composé des variantes. Leurs commentaires vont nous permettre de compléter nos réflexions sur les coïncidences et d'aborder ce qui était sous-jacent au second problème : l'arithmétique des nombres infinis à gauche, les étranges nombres décadiques.

Rappelons les énoncés soumis à la sagacité des lecteurs et illustrés à côté du titre.

Coïncidence 1

Partant de 14 et doublant à chaque fois, nous disposons une addition infinie en décalant de deux chiffres vers la droite chaque nouvelle ligne. Nous obtenons 142857142857142857… répété indéfiniment. Or cette suite est celle que nous obtenons quand nous divisons 1 par 7 : 1/7 = 0,142857142857... Pourquoi?

Coïncidence 2.

Nous effectuons l'addition des puissances de 2 en décalant cette fois d'un chiffre vers la gauche à chaque ligne. La suite des chiffres du résultat se répète, et il s'agit des décimales de la fraction 1/19, soit 0.052631578947368421052631578947368421… Pourquoi?

Résolution de l'énigme 1

Pour la première énigme, il suffit de remarquer que l'addition disposée à côté du titre de l'article correspond à la somme S : $S=7\times(2/100+(2/100)^2+(2/100)^3+(2/100)^4+...)$. La parenthèse est la somme des termes d'une suite géométrique. En utilisant la formule $1+X+X^2+X^3+X^4+...=1/(1–X)$, $S=7\times(2/100)(1/(1–2/100)=(7\times 2x100)/(98\times 1)$ = 14/98 = 1/7, ce qui explique la «coïncidence»!

Remarquons que, pour résoudre cette première énigme, nous n'avons pas besoin de connaître les décimales calculées, ni même de savoir que le résultat final est périodique. Nous n'avons même pas besoin de savoir faire une division ou une addition en base dix! Le miracle de tous ces nombres à l'écriture compliquée et sans régularité notable, s'additionnant pour former une suite périodique, n'en est pas un. Pour résoudre le problème, il suffisait de se dégager de sa complication numérique apparente et de s'aider d'un résultat abstrait (mais quand même très simple).

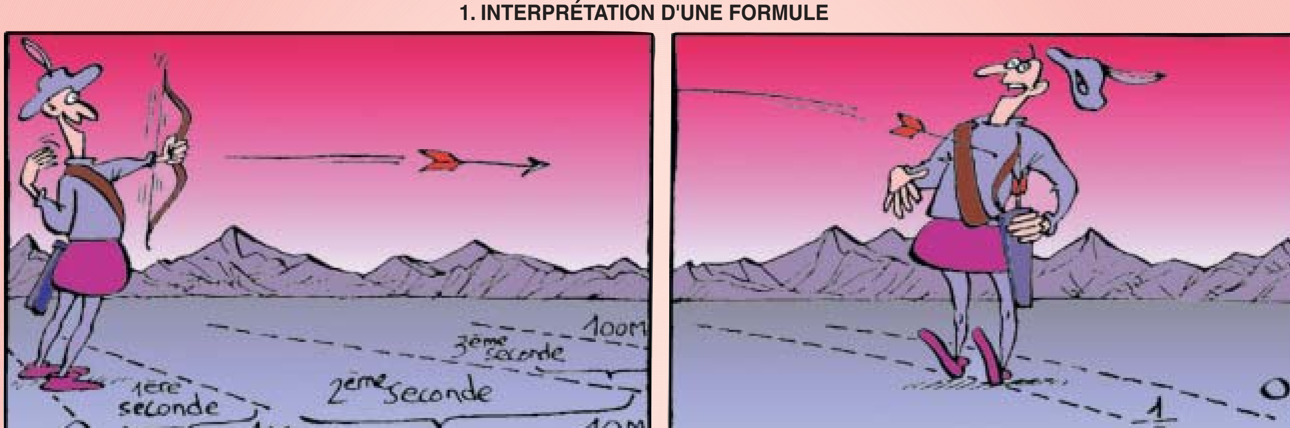
Variantes de l'énigme 1

Voici quelques variantes de la première énigme. D'abord une addition due à Jean-Paul Hermann, qui part de 97 et qui triple d'une ligne à la suivante en décalant de deux chiffres vers la droite :

97
\+ 291
\+ 873
\+ 2619
\+ 7857
\+ 23571
\+ 70713
\+ 212139
\+ ....

9999999999999999

1. INTERPRÉTATION D'UNE FORMULE



La flèche tirée par l'archer parcourt 1 mètre dans la première seconde, 10 dans la demi-seconde qui suit, 100 mètres durant le quart de seconde suivant, etc. Après avoir tiré sa flèche, l'archer se retourne. Surprise : la flèche revient de l'infini et le transperce après qu'il a parcouru 1/9 de mètre en deux secondes! Ce paradoxe, proposé par Ilan Vardi, illustre l'interprétation d'une formule : la somme divergente 1+10+100+... est "égale" à – 1/9 avec la formule de la somme d'une série géométrique.

J.-M. Thiriet

L'explication tient sur deux lignes : $S=(97/100)\times(1+3/100+(3/100)^2+(3/100)^3+...)$ $=(97/100)/(1-3/100)=(97\times100)/(97\times100)=1$.

N'oublions pas que 0,99999... =1, car l'écart entre 0,99999... et 1 est plus petit que 0,1, mais aussi plus petit que 0,01 et plus petit aussi que 0,001, etc. L'écart est plus petit que tout nombre positif, il est donc nul. D'où l'égalité.

Voici une addition infinie due à Frédéric De Ligt. On part de 1 et on multiplie par 3 en décalant d'un chiffre vers la droite :

```
   1
+  3
+   9
+   27
+    81
+     243
+      729
+       2187
+ ..................
  142857142857...
```

À nouveau, ce sont les chiffres de 1/7, ce que je vous laisse démontrer.

L'addition suivante, de Jean Blanchard, prouve que l'informatique qui fait un usage incessant des nombres 64, 256, 1024 et autres puissances paires de 2 est bien une œuvre du diable… à moins que cela ne prouve qu'en cherchant bien on peut faire apparaître 666 partout où on le veut.

On part de 64 et l'on multiplie par 4 en décalant de deux chiffres vers la droite :

```
  64
+ 256
+    1024
+      4096
+        16384
+          262144
+ ...............................
  6666666666666666…
```

Tomber sur une suite périodique de décimales dans de grandes additions de cette sorte n'a rien d'étonnant. La réalité est même que, ne pas tomber sur une suite périodique de chiffres est impossible.

En effet, si vous écrivez un nombre entier quelconque sur la première ligne du tableau et qu'ensuite, pour obtenir les autres lignes, vous le multipliez par un nombre entier choisi une fois pour toutes en effectuant un décalage vers la droite d'un nombre constant de cases, alors vous obtiendriez la somme d'une série géométrique, somme qui sera un nombre rationnel (de la forme *p/q* avec deux entiers) et donc possédera un développement décimal périodique.

Résolution de l'énigme 2

La seconde énigme est plus difficile, car l'addition est infinie à gauche, chose qui apparemment n'a pas de sens. Parmi les solutions des lecteurs, certaines étaient incomplètes ou fausses, et les solutions complètes étaient souvent assez longues (deux pages ou plus). La solution de Jean-Paul Hermann est à la fois élémentaire

2. LES NOMBRES DÉCADIQUES ET LES OPÉRATIONS SUR CES NOMBRES

Les nombres décadiques sont les nombres qu'on obtient en s'autorisant à placer une infinité de chiffres avant la virgule et un nombre fini de chiffres après la virgule (pour les nombres réels la règle est inverse : un nombre fini de chiffres avant la virgule, et un nombre infini de chiffres après la virgule). Exemples : ...11111111,111 ...13131313,99332

L'addition des nombres décadiques n'a pas de mystère :

```
  ...242424242        ... 888888,888
 +...111111111      + ...111111,112
  ...353535353        ...000000,000
```

Toutefois, la seconde addition montre que l'opposé du nombre ...888888,888 est le nombre ...111111,112, autrement dit que : –...888888,888 =...111111,112. Vous pouvez vérifier de même que :
–...999999999 = 1 et que – 123 =...999999877
Plus généralement : –...*edcba* =...(9 – *e*)(9 – *d*)(9 – *c*)(9 – *b*)(10 – *a*)
Le résultat d'additions infinies de nombres décadiques peut surprendre :

```
          9
+        90
+       900
+      9000
+     90000
+ ..................
= ... 999999999999
```

Or ...999999999999 + 1 = 0. Nous avons l'étrange résultat :
9 + 90 + 900 + 9000 + 90000 +....= –1.
Puisque bien sûr : ...999999999999 = 9 x (...111111111111), on a donc : ...111111111111 = -1/9
Pour qu'une addition infinie soit possible il faut et il suffit que le nombre de 0 terminant les nombres qu'on additionne augmente toujours. Cela permet de définir la multiplication des nombres décadiques.

La multiplication décadique

Pour faire une multiplication on opère de la même façon qu'habituellement sans jamais s'arrêter, comme indiqué en *a* :

```
a
          ... 242424242
        x ...111111111
      ... 24242424242
     ... 24242424242
    ... 24242424242
   ... 24242424242
  ... 24242424242
  .............................
   ...528615286152862
```

```
b
        24242424242
   x    ...13131313
         ...27272726
        ...42424242
       ...27272726
      ...42424242
     ...27272726
 ............................
    ??????489746
```

On montre que si on multiplie deux nombres décadiques périodiques entre eux, alors on obtient un nombre décadique périodique. En fait les nombres décadiques périodiques sont les fractions *(voir la figure 5)*.
On vérifie, en effectuant les multiplications : ... 242424242 x 33 ; ...11111111 x 9 et ... 528615286152862 x 297, que : ... 24242424242 = – 42/99 = – 14/33 ; ....111111111 = –1/9 ; ...528615286152862 = 42/891 = –14/297
La période d'un produit peut être longue : celle du produit indiqué en *b* est de longueur 66, et le résultat de la multiplication est égal à ...*sssss*6 où *s* = 594429139883685338230792776247321701867156412610958065503520048974

La division décadique

```
  ...3333333333333333    | ...1212121212121212121
 –...6363636363636363    | ...428571428571428573
 = ...6969696969696970
   ...696969696969697
 – ...848484848484847
 = ...848484848484850
   ...84848484848485
   ...............
```

On vérifie bien sûr que : ...121212121212121 x ...428571428571428573 = ...33333333333333

On considère le dernier chiffre, 3. On soustrait donc 3 x..212121212121 = ...63636363636363 à ....333333333333, pour faire apparaître un zéro en dernière position. On trouve ...696969696970. On efface le zéro : ...69696969697. Comme le dernier chiffre est 7, on soustrait donc le produit 7 x ...212121212121 = ...4848484847. On trouve ...84848484850. On efface le zéro ce qui donne ...8484848485 ; le dernier chiffre est 5. On soustrait alors le produit 5 x ...212121212121 = ...60606060605. Etc..

3. LA SÉRIE GÉOMÉTRIQUE REVISITÉE

La démonstration de l'identité $1+X+X^2+...+X^n = (1-X^{n+1})/(1-X)$ est facile. Il suffit d'établir que : $(1+X+X^2+...+X^n)(1-X) = (1-X^{n+1})$, ce qui est évident, car :
$(1+X+X2+...+X^n)(1-X) = (1+X+X^2+...+X^n) \times 1 - (1+X+X^2+...+X^n) \quad X$
$= (1+X+X^2+...+X^n) - (X+X^2+...+X^{n+1}) = 1 - X^{n+1}$.
Il en résulte que, si X^{n+1} converge vers zéro, alors :
$1+X+X^2+...+X^n+... = 1/(1-X)$
Distinguons deux cas :
Nombres réels. Avec les nombres infinis à droite (dénommés nombres réels : ce sont ceux que tout le monde connaît et utilise), X^{n+1} converge vers 0 si, et seulement si, la valeur absolue de X est inférieure à 1. La formule de la série géométrique donne en particulier que : $1 + 1/2 + 1/4+ ... = 2$. Elle donne aussi : $0,999999... = 0,9 + 0,09 + 0,009 + ... = 9/10 \quad (1 + 1/10 + 1/10^2 + ... + 1/10^n +...)$
$= 9/10 \quad 1/(1-1/10) = 1$.
Nombres décadiques. Une suite x_n de nombres décadiques converge vers 0 si et seulement si le nombre des zéros à la fin de x_n devient de plus en plus grand quand n tend vers l'infini, comme c'est le cas avec la suite : 1, 20, 400, 8000, 160000, ..., 20^n. N'importe quelle suite du type $(k \times 10)^n$ tend donc vers 0 à l'infini. Il en résulte que, si X se termine par au moins un zéro (exemple : X= 20), alors la série géométrique $1+X+X^2+...$ est une série décadique convergente et a pour somme : $1/(1-X)$.
Dans le cas où X = 20, on a $1+ 20 + 20^2+... = 1/(1-20) = -1/19$.
On retrouve aussi que : $...99999 = 9 \times ...11111 = 9(1+10+100+1000+...)$
$= 9 \quad 1/(1-10) = 9 \quad (-1/9) = -1$.

et élégante. Son raisonnement utilise la formule de la somme des termes d'une série géométrique finie *(voir la figure 3)* :
$1+X+X^2+X^3 + ... + X^{n-1} = (X^n - 1)/(X - 1)$.

Considérons les n premières lignes du tableau mystérieux. En complétant par des zéros à droite, leur somme est :
$S(n) = 1 + 20 + 20^2 + 20^3 +...+ 20^{n-1} = (20^n - 1)/(20 - 1) = 10^n \times 2^n /19 - 1/19$.

Remarquons maintenant que, lorsque n est multiple de 18, alors le nombre 2^n est de la forme $19k+1$ pour un certain entier k. Ce point délicat s'établit en notant que $2^{18} = 262144 = 13797\times19 + 1$, et en remarquant qu'en multipliant deux nombres de la forme $19k+1$ l'un par l'autre, on obtient encore un nombre de la même forme. Donc, lorsque n est multiple de 18, il existe un entier k tel que :
$S(n) = 10^n \times (19k + 1)/19 - 1/19 = 10^n \times k + 10^n/19 - 1/19$.

Dans cette somme, le terme $10^n \times k$ n'a pas d'importance pour les n derniers chiffres (c'est la généralisation d'une évidence : additionner 2300000 à un entier n'en modifie pas les cinq derniers chiffres).

Donc lorsque n est un multiple de 18, l'addition des n premières lignes donne, dans les n dernières colonnes, des chiffres qui sont ceux du nombre $10^n/19 - 1/19$, chiffres qui sont ceux qu'on obtient quand on fait la division de 1 par 19 (car on obtient les mêmes chiffres quand on divise 1 par 19 ou 10 par 19 ou 100 par 19, etc.). Le $-1/19$ fait disparaître les chiffres situés après la virgule de $10^n/19$.

Les n derniers chiffres du tableau sont donc ceux que donnent les N premiers chiffres de la division de 1 par 19. En prenant des n de plus en plus grands (n =18, n = 36, n = 54, etc.), on a l'explication complète de la coïncidence. (Une autre solution plus simple encore, mais utilisant les nombres décadiques, est proposée plus loin).

Autres coïncidences du second type

Frédéric de Ligt et Raymond Millon proposent cette jolie variante. On part de 7 et on multiplie par 5 en décalant d'un chiffre vers la gauche :

```
              7
       +     35
       +    175
       +    875
       +   4375
       +  21875
       + 109375
 +   .....................
...142857142857142857, chiffres de 1/7.
```

Frédéric de Ligt a aussi découvert une addition pour 1/13. On part de 3 et on multiplie par 4 en décalant d'un chiffre vers la gauche :

```
              3
       +     12
       +     48
       +    192
       +    768
       +   3072
       +  12288
 + ........................
...076923076923076923, chiffres de 1/13.
```

La justification de ces coïncidences du second type peut se faire à chaque fois sur le modèle de l'explication donnée plus haut. Cependant, cela semble un peu compliqué. La pratique de ces additions infinies sur la gauche suggère que nous pourrions bien généraliser les nombres habituels et en considérer qui seraient infinis vers la gauche. Mais est-ce que tout cela est possible et possède un sens ? Ne va-t-on pas obtenir des résultats absurdes, voire des contradictions ?

C'ÉTAIT IL Y A CENT ANS

Eh bien non, on ne tombera sur aucune contradiction en manipulant des nombres infinis vers la gauche, car il existe une théorie mathématique qui leur donne un sens et les étudie. Si une contradiction était découverte dans cette théorie, elle se traduirait par une contradiction en théorie des ensembles, et cela est jugé improbable.

Cette théorie, qui, précisons-le, n'a rien à voir avec la théorie des nombres infinis de Cantor (ordinaux et cardinaux) est vieille d'un peu plus d'un siècle. Elle est née dans la tête du mathématicien allemand Kurt Hensel à la fin du XIXe siècle et est devenue un outil important en arithmétique, où elle sert en particulier à résoudre certaines équations diophantiennes (ce sont des équations à coefficients entiers). Cette théorie est peu enseignée, alors qu'elle ouvre sur un monde de nombres aux propriétés étranges qu'on pourrait utiliser dans les classes des collèges et des lycées pour prouver aux élèves que les mathématiques sont un univers féerique.

Contrairement aux nombres habituels qui peuvent se convertir d'une base de numération à l'autre sans perdre leur identité, les nombres infinis à gauche ne supportent pas le changement de base. Si vous choisissez de travailler en base de numération décimale (ce que nous allons faire), il faut toujours y rester, et les résultats changent si vous changez de base. Dit autrement, il y a autant de catégories de nombres infinis à gauche qu'il y a de bases possibles.

Les nombres infinis à gauche en base 10 sont les nombres décadiques. On les a parfois dénommés *brenoms*, qui signifie nombre en verlan, car ils s'étendent vers la gauche sans limite, comme les nombres habituels (les nombres dits réels) s'étendent vers la droite sans limite. Lorsqu'on se place en base n plutôt que 10, on parle de nombres n-adiques (la base s est bien sûr particulièrement douloureuse).

On peut leur mettre une virgule suivie d'un nombre fini de chiffres, ce qui est exactement la règle symétrique qu'on a avec les nombres réels : une infinité de chiffres après la virgule, mais seulement un nombre fini de chiffres avant la virgule. Un nombre décadique est donc par exemple :

...179179179,345

les trois petits points signifiant qu'on répète infiniment la séquence 179 vers la gauche. Les nombres décadiques qui n'ont rien après la virgule sont les entiers décadiques.

Additionner les nombres décadiques ne pose pas de difficulté *(voir la figure 1)* :

.. 14141414,51
+ ...88888888,888
= ...03030303,398

On effectue l'addition en opérant comme à l'habitude le report des retenues qu'on imagine avoir le temps de poursuivre tranquillement jusqu'à la fin des temps.

Les nombres que nous avons pris en exemple sont périodiques, mais c'est par simple commodité, car on peut très bien en imaginer de non périodiques comme :

..... 1000001000010001001011
..... 2648323979853562951413

Une propriété étrange apparaît quand nous essayons certaines additions :

9	...123123,123
+...9999999991	+...876876,877
=...0000000000	=...000000,000

Nous pouvons obtenir 0 en additionnant deux nombres décadiques. Cela signifie simplement que ce que nous dénommons l'opposé d'un nombre décadique n'a pas besoin du signe – pour exister. L'opposé de 9, que nous notons habituellement –9, peut aussi s'écrire ici ...9999999991. Vous vérifierez sans peine que tout nombre décadique possède un opposé que l'on obtient en complémentant ses chiffres (on remplace le dernier chiffre c par $10 - c$ et chaque autre chiffre par $9 - c$), ce qu'on écrit sous forme de règle : $...edcba = -...(9-e)\ (9-d)\ (9-c)\ (9-b)\ (10-a)$.

Cette façon de trouver l'opposé d'un nombre décadique montre que, dans le monde décadique, la notion de nombre positif n'a pas de sens. C'est une grande différence entre les nombres réels (infinis à droite) et les nombres décadiques (infinis à gauche), qui a pour conséquence qu'on ne sait pas classer les nombres décadiques d'une façon intéressante. Il peut paraître bizarre que des nombres

4. L'UNIVERS ÉTRANGE DES NOMBRES DÉCADIQUES

Le monde des nombres décadiques se distingue du monde des nombres réels sur plusieurs points importants, mais qui n'empêchent pas ce monde de nombres infinis d'être parfaitement cohérent.

Nombres automorphes

Il existe des solutions autres que 0 et 1 à l'équation $X^2 = X$. De tels nombres sont dénommés nombres automorphes. Il y a deux nombres automorphes, dont voici les 90 derniers chiffres :

X_1=...108169802938509890062166509580863811000557423423230896109004106619977392256259918212890625.

X_2=...891830197061490109937833490419136188999442576576769103890995893380022607743740081787109376.

Concrètement, cela signifie par exemple que, lorsque vous multipliez par lui-même un nombre se terminant par les dix derniers chiffres de X_1, soit 8212890625, vous obtenez un nombre se terminant par les mêmes chiffres (il en va de même, bien sûr, pour les 20 derniers chiffres ou pour un nombre quelconque de chiffres pris à la fin de X_1 ou de X_2). Un procédé général pour connaître les chiffres de X_1 consiste à calculer les n derniers chiffres de 5 élevé au carré n fois de suite (soit 5^{2^n}). Le second nombre automorphe est lié au premier par la relation $X_1 + X_2 = 1$.

Diviseurs de zéro, nombres non inversibles

Lorsqu'on prend deux nombres réels non nuls, leur produit est non nul : on dit que, dans le monde des nombres réels, il n'y a pas de diviseurs de zéro. Dans le monde des nombres décadiques, en revanche, il y a des diviseurs de zéro, car le produit $X_1 \quad X_2 = X_1(1 - X_1) = X_1 - X_1^2 = 0$.

Les nombres X_1 et X_2 ne sont pas nuls, mais leur produit est nul! Concrètement, cela signifie qu'en multipliant le nombre composé des 20 derniers chiffres de X_1 avec celui composé des 20 derniers chiffres de X_2, vous obtenez un nombre dont vous savez par avance que ses 20 derniers chiffres seront des 0 :

92256259918212890625 x 07743740081787109376 = 714408497724434710200000000000000000000

Il existe bien d'autres diviseurs de zéro. En effet, le produit d'un nombre décadique Y quelconque par X_1 ou X_2 est encore un diviseur de zéro, puisque : $(Y \quad X_1) \quad X_2 = Y \quad (X_1 \quad X_2) = Y \times 0 = 0$.

Remarquons aussi que les diviseurs de zéro ne peuvent pas posséder d'inverse. Supposons que X_1 possède un inverse Z, alors : $X_2 = X_2 \quad 1 = X_2 \quad (X_1 \quad Z) = (X_2 \quad X_1) \quad Z = 0 \quad Z = 0$, ce qui est absurde, car X_2 n'est pas nul.

Le fait que certains nombres décadiques ne possèdent pas d'inverse explique que le monde des nombres décadiques est peu utilisé en mathématiques. Si, au lieu de calculer en base 10, on calculait en base p (p un nombre premier) alors les nombres p-adiques qui seraient ainsi définis auraient la propriété que tout nombre non nul possède un inverse, et il n'y aurait plus de diviseur de 0. On dit que, si p est un nombre premier, les nombres p-adiques forment un corps, et cette fois ce corps est très utile en arithmétique.

Racines carrées

Nous savons bien que, dans le monde des nombres réels, une équation de degré n possède au plus n solutions et qu'en particulier un nombre réel possède au plus deux racines carrées. Dans le monde des nombres décadiques, les choses vont différemment. D'abord, un nombre peut posséder jusqu'à 4 racines carrées. Vous vérifierez que $(2X_1-1)^2 = 1$, ce qui signifie que 1 possède non seulement les racines carrées 1 et –1 mais aussi les racines carrées $2X_1-1$ (et donc $1-2X_1$). Les équations de degré d peuvent, elles, posséder jusqu'à d^2 solutions (si, au lieu de se placer en base 10, on se plaçait en base n, n étant un nombre entier ayant k facteurs premiers distincts, alors d^2 deviendrait d^k).

Voici, par exemple, les derniers chiffres de deux racines carrées (autres que $r_1=2$ et $r_2 = -2$) de 4 :

r_3 = ...703063070764155639835735200904309749603271484375O2.

r_4 = ...29693692923584436016426479909569025039672851562498.

Encore une étrangeté : alors que tout nombre entier 0, 1, 2, 3, ... possède une racine carrée dans le monde des nombres réels, il en va autrement dans le monde des nombres décadiques. Le nombre 2 n'a pas de racine carrée, ni 3, ni 5. Le nombre 41 (qui n'est pourtant pas un carré parfait d'entier) possède, lui, quatre racines carrées décadiques . Voici d'ailleurs les derniers chiffres d'une racine carrée décadique de 41 :

...780284689680810830084469701318156276927163008501664117627064056375743830738554067263241296179.

Cela signifie que, si vous élevez ce nombre au carré, vous tomberez sur un nombre dont les derniers chiffres seront ....000041. Les nombres entiers inférieurs à 100 qui possèdent des racines carrées dans le monde décadique sont 1, 4, 9, 16, 25, 36, 41, 49, 64, 81 et 89.

5. NOMBRES RÉELS ET DÉCADIQUES PÉRIODIQUES

Si s est une suite finie de chiffres de longueur p, alors le nombre décadique *...ssss* vaut $-s/(10^p-1)$ et le nombre réel *0,ssss...*, vaut $s/(10^p-1)$. Tout est là.

En effet, d'une part avec des nombres décadiques, *...ssss* – (10^p *...ssss*) = s (exemple, avec $s = 51$, donc $p = 2$, ...51515151515151 – 51515151515100 = 51).
D'autre part, avec des nombres réels, on a : 10^p *0,ssss...* – *0,ssss...* = s (exemple : 51,51515151... – 0,5151515151... = 51).
On en déduit que, comme cela se passe dans le monde des nombres réels, les nombres décadiques périodiques à partir d'un certain point sont les quotients de deux entiers naturels (c'est-à-dire les fractions au sens habituel du terme : 12/47, – 32/1997, etc.). Il en résulte aussi que le produit de deux nombres décadiques périodiques est toujours périodique.
Ces égalités résolvent les coïncidences posées au début de l'article :
1+20+400+8000+160000+... = 1/(1–20) = –1/19 (d'après la formule de la série géométrique en décadique). Le calcul en nombres réels de 1/19 donne un résultat de la forme *0,sss* pour une certaine séquence s de chiffres. D'après les deux lignes du haut, la même séquence de s donne l'écriture de –1/19 en décadique.

ne se classent pas, et donc ne puissent pas servir à ordonner quoi que ce soit, mais c'est aussi ce qui se passe pour les nombres complexes. Nombre d'autres propriétés des nombres décadiques justifient cependant qu'on les dénomme nombres.

La soustraction se définit sans problème soit en généralisant l'opération habituelle, soit en indiquant que soustraire x c'est additionner – x, ce qui, nous le constatons, revient au même.

...22222222222	123123,123
– 5	– ... 999999,999
= ...2222222217	= 123123,124

La multiplication

Pour la multiplication, on ne rencontre pas de difficultés particulières non plus : on utilise la méthode usuelle apprise à l'école, qu'on imagine poursuivre à l'infini *(voir la figure 2).*

Notre exemple porte sur des nombres périodiques, mais il n'y a bien sûr aucune obligation à cela, et la multiplication est définie pour tous les nombres décadiques. Que le produit de deux nombres périodiques le soit aussi est une propriété générale.

L'addition et la multiplication ainsi définies possèdent toutes les bonnes propriétés qu'on attend : a+b=b+a, (a+b)+c=a+(b+c), axb=bxa, (a×b)×c= a×(b×c), (a+b)×c= a×c+b×c, etc. Le mathématicien dit que l'ensemble des nombres décadiques est un anneau commutatif, mais peu importe. Certaines choses surprenantes se produisent :

...2857142857143 × 7 = 1.
...765432098765432 × 9 = ...8888888888

La première des égalités signifie que 7 possède un inverse qui est ...2857142857143, et l'on peut donc écrire :

...2857142857143 = 1/7.

La question de savoir quels nombres décadiques possèdent un inverse conduit à s'interroger sur ce que serait l'opération de division.

La division

Notons d'abord que, grâce au système des virgules, on peut toujours diviser un nombre décadique par 2 et par 5 :

...11111111 : 2 = ...55555555,5
...321321321 : 5 = ...64264264,2

Nous pouvons donc toujours diviser un nombre décadique par n'importe quel nombre de la forme 2n x 5m.

Pour les autres nombres, en particulier pour tous les nombres infinis ...*dcba*, nous pouvons tenter d'effectuer l'opération de division décadique décrite à la figure 2. Cette opération consiste à faire apparaître des zéros progressivement à droite dans les restes successifs. Un peu d'attention montre que c'est possible si le dernier chiffre a du diviseur ....*dcba* donne, lorsqu'on le multiplie par 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, des nombres se terminant par tous les chiffres possibles 0, 1, ... 9 (pas toujours dans cet ordre).

C'est évidemment vrai si $a = 1$. C'est vrai aussi si $a = 3$, car 3 × 0=0 ; 3 × 1=3 ; 3 × 2 = 6 ; 3 × 3 = 9 ; 3 × 4 = 12 ; 3 × 5 = 15 ; 3 × 6 = 18 ; 3 × 7 = 21 ; 3 × 8 = 24 ; 3 × 9 = 27 . On vérifie que c'est encore vrai pour 7 et pour 9, mais pas pour 0, 2, 4, 6, 8.

En résumé l'opération de division décadique peut donc se faire si le dernier chiffre du diviseur ...*dcba* est 1, 3, 7 et 9. (Dans le cas général où nous considérons la base n à la place de 10, il faut que a soit premier avec n).

Lorsque ce n'est pas le cas, tout n'est pas perdu, nous divisons le numérateur et le dénominateur de la fraction que nous cherchons à calculer par 2 ou par 5 (ce qui est toujours possible) pour faire disparaître du diviseur les chiffres terminaux 0, 2, 4, 5, 6 et 8 qui gênent. Nous espérons trouver, au bout d'un nombre fini d'essais, un dénominateur qui se termine par 1, 3, 7 ou 9. C'est presque toujours le cas. Pour certains nombres décadiques étranges, cependant, jamais nous ne réussirons. En voici deux (la figure 4 explique comment les calculer) :

X_1=...3953007319108169802938509890062166509580863811000557423423230896109004106619977392256259918212890625.

X_2=...6046992680891830197061490109937833490419136188999442576576769103890995893380022607743740081787109376.

Le premier est indéfiniment divisible par 5 (jamais on ne trouve un résultat se terminant par 1, 3, 7 ou 9 quand on le divise par 5) le second est indéfiniment divisible par 2.

Ces deux nombres ont une autre propriété remarquable, qui n'a pas d'équivalent dans le monde des nombres réels : leur produit est nul : $X_1 \times X_2 = 0$.

Nous disons que X_1 et X_2 sont des diviseurs de zéro (et que l'anneau des nombres décadiques n'est pas intègre). Chacun de ces nombres a aussi l'étrange propriété d'être égal à son carré. Nous disons que X_1 et X_2 sont des nombres automorphes. Il n'y en a aucun autre, mis à part bien sûr 0 et 1.

$(X_1)^2 = X_1$; $(X_2)^2 = X_2$.

Bien d'autres propriétés étonnantes des nombres décadiques montrent que l'on peut «compter» sur eux. Le monde des nombres décadiques permet de comprendre en profondeur et sans raisonnement compliqué les additions infinies du second type, qui correspondent à des séries géométriques (comme les additions infinies du premier type correspondaient à des séries géométriques dans le monde des nombres réels). On peut alors sans mal inventer de nouvelles additions infinies comme celle-ci, qui plaira aux superstitieux. On part de 46 et on multiplie par 7 pour chaque nouvelle ligne :

```
          46
       + 322
      + 2254
     + 15778
    +119446
.....................
   ...66666666
```


Roger Cuculière, *À l'horizon de l'arithmétique décimale : les nombres 10-adiques,* in *Pour la Science*, juin 1986.

H.-D. Ebbinghaus et J. Neukirch, *Les nombres* (chapitre 6), Vuibert, 1998 (uniquement les *p*-adiques avec *p* premier).

R. Ferréol, *Les brenoms*, Notes d'exposé communiquées par l'auteur.

M. Guinot, *Les nombres be-adiques*, IREM de Lyon, 1987.

V. Lefèvre, *Les brenoms*, janvier 1994. Texte à télécharger à l'adresse : www.ens-lyon.fr/~vlefevre (précis, accessible et assez complet).

J.-P. Serre, *Cours d'arithmétique*, PUF, Paris, 1970.