Jean-Paul Delahaye

La barrière de Turing

La sommation de séries géométriques, la relativité générale et la mécanique quantique proposent des mécanismes de calcul intéressants, mais probablement utopiques.

Contrairement à ce que les mathématiciens ont pensé – sans doute par souci d'indépendance et parce qu'ils croient que leur science est reine – le calcul est une affaire physique. C'est à la relativité générale et à la mécanique quantique de déterminer ce qui est possible dans le domaine de la manipulation et du traitement de l'information… Cet examen réserve surprises, rêves et utopies.

Turing et ses machines

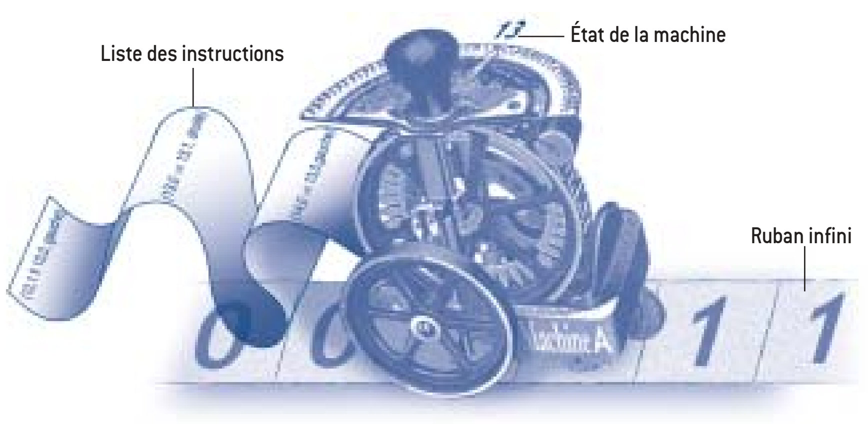
L'histoire du calcul par machine commence avec la « Pascaline » de Blaise Pascal, mais l'examen théorique des possibilités du calcul est né avec Alan Turing qui proposa, en 1936, un modèle de calculateur dénommé aujourd'hui machine de Turing. Cette machine au fonctionnement très simple a une puissance théorique étonnante : grossièrement dit, elle peut calculer tout ce qui semble calculable…

Une machine de Turing est constituée d'un automate qui se déplace sur un ruban constitué de cases où l'automate lit des symboles, nous supposerons ici que ce sont des chiffres binaires, un par case ; en fonction d'une liste finie d'instructions (un programme qui définit la machine), l'automate, à la lecture du symbole sur la case, réagit en modifiant son état interne et en changeant éventuellement le chiffre inscrit sur la case du ruban placée sous la tête de lecture. Une instruction de machine de Turing est, par exemple, [52, 0 ⇒ 53, 1, droite], ce qui signifie que lorsque la machine est dans l'état numéro 52 et que le symbole lu sur la case du ruban par la tête de lecture est 0, alors elle passe dans l'état numéro 53, change le 0 de la case en 1 et se déplace d'une case vers la droite.

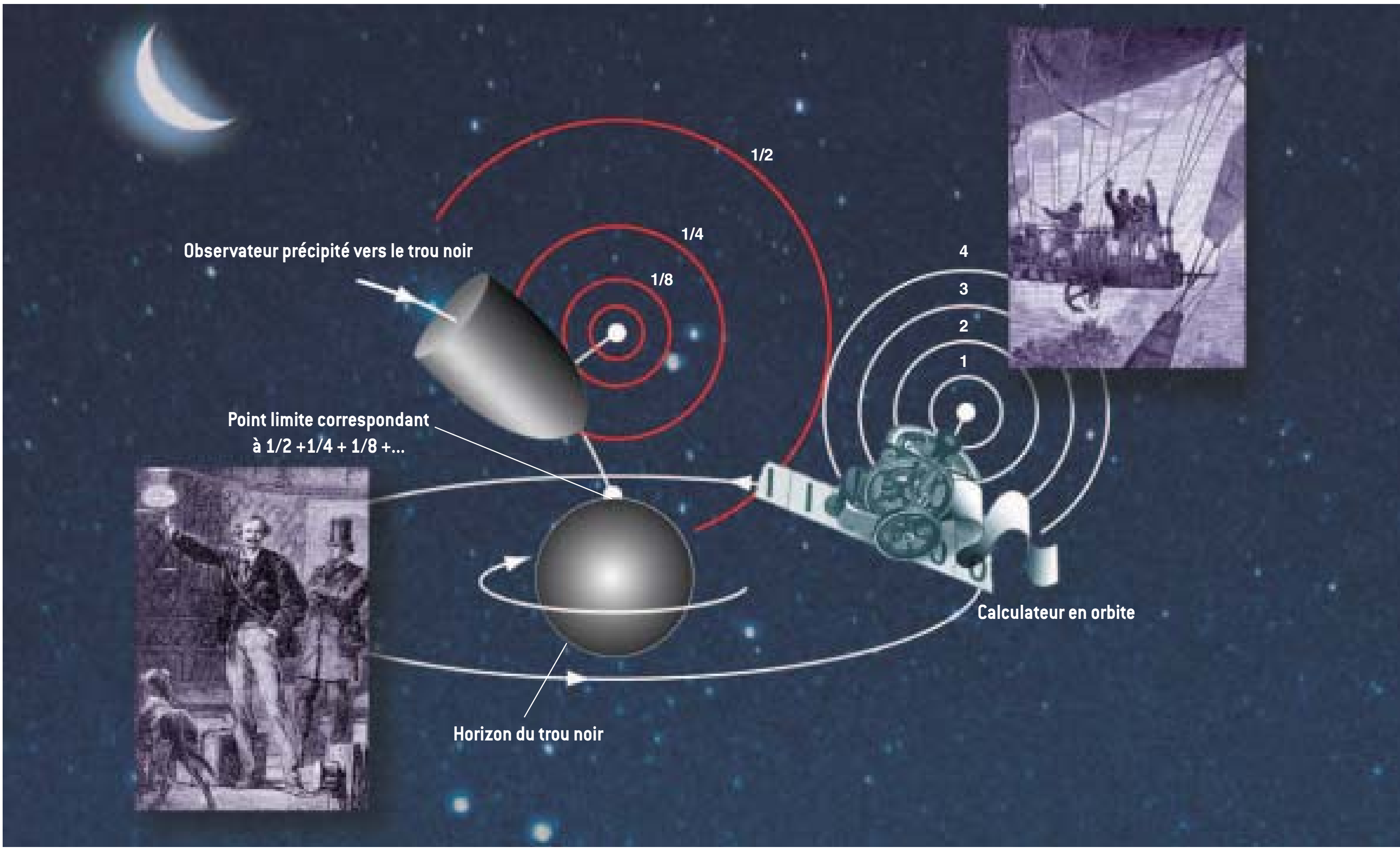
On sait, selon ce principe de fonctionnement, concevoir un jeu d'instructions pour calculer le n-ième nombre premier. Quand on inscrit sur le ruban le nombre n (en écriture binaire par exemple, un chiffre par case) et que l'on place la machine de Turing sur la première case du ruban (où est inscrit le premier chiffre binaire du nombre n), la machine effectue une série d'opérations déterminées par la liste d'instructions et, après avoir inscrit sur le ruban le n-ième nombre premier, elle s'arrête (car plus aucune instruction n'est applicable).

Une telle machine calcule ainsi la fonction qui, à l'entier n, associe le n-ième nombre premier. En fait, à toute fonction résultant d'un algorithme, on sait associer une liste d'instructions pour machine de Turing, c'est-à-dire un programme, qui simule l'algorithme. Insistons : toute fonction que vous savez programmer en utilisant votre langage préféré et que vous exécutez sur votre ordinateur est implantable sur une machine de Turing.

À partir de l'examen de la machine de Turing, la théorie du calcul a pu s'épanouir et donner toute une série de résultats mathématiques définissant les limites du calcul.



1. Une machine de Turing possède un nombre fini d'états internes (ici elle est dans l'état 13). Elle modifie cet état en fonction d'une liste d'instructions et de ce qu'elle lit sur les cases d'un ruban. Elle change aussi éventuellement les chiffres inscrits sur les cases du ruban. Ainsi la machine dans l'état 12 et qui lit le chiffre 1 sur la case du ruban passe à l'état 13, change le 1 en 0 sur la case du ruban et se déplace d'une case à gauche en suivant l'instruction (12, 1⇒13, 0, gauche) de sa liste d'instructions. Elle suit ensuite les instructions (13, 0 ⇒14,1, droite), (14,1 ⇒ 13,0, gauche), etc. De telles machines peuvent effectuer tous les calculs que l'on peut commander par une liste d'instructions, c'est-à-dire un programme.



2. Se jeter dans un trou noir pour tout savoir ? La physique des trous noirs permettrait de réaliser des systèmes physiques se comportant comme des machines accélérantes. Gabor Etesi et Istvan Németi ont établi que si l'astronaute Michel Ardan du roman de Jules Verne *De la Terre à la Lune* était précipité vers un trou noir en rotation, alors, dans son repère propre, il recevrait des informations par signaux électromagnétiques d'un ordinateur en rotation autour du trou noir, comme celui de *Robur le Conquérant*. Les signaux envoyés par l'ordinateur en orbite à des instants 1, 2, 3... régulièrement espacés d'une seconde (dans le repère de Robur en orbite) seront reçus par Ardan à des instants de plus en plus rapprochés, séparés de 1/2 seconde, puis 1/4 seconde, puis 1/8 de seconde, etc. L'instant limite (1 seconde) sera atteint et, après, Ardan pourra continuer à réfléchir : tout se passerait comme s'il disposait d'une machine accélérante et il prendrait connaissance de vérités aujourd'hui considérées comme inaccessibles avant d'être happé par le trou noir. Qui est volontaire pour un essai ?

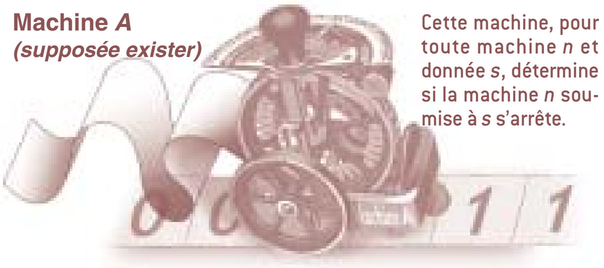
Le problème de l'arrêt

Deux résultats sont mis sur la sellette par les physiciens : l'existence de machines universelles et l'indécidabilité de l'arrêt.

Une machine de Turing étant définie par la liste de ses instructions, une suite finie de symboles pris dans un alphabet fixé à l'avance, on sait classer les machines de Turing en fonction de la longueur de cette suite de symboles et, lorsqu'elles ont même longueur, en fonction de l'ordre alphabétique. Ce classement réalisé, nous pouvons parler de la machine n° 1 ou de la machine n° 328 465. Turing a établi qu'il existe une machine de Turing nommée *Machine universelle*. Le programme de cette machine, désignons-la par *U*, combine celui de toutes les autres machines de Turing. Lorsque l'on inscrit sur son ruban un entier *n* suivi d'une suite *s* de symboles, elle effectue le calcul que ferait la machine de Turing numéro *n* partant de la première case du ruban où *s* a été inscrit. La machine universelle *U* simule toute autre machine et son existence n'est pas une lubie de théoriciens, car tout ordinateur moderne est équivalent à une telle machine.

Le problème de l'arrêt est important, car si un ordinateur entre dans une boucle ou ne s'arrête pas, car il a toujours des instructions à exécuter, il est difficile d'en faire quelque chose. Aussi a-t-on cherché à prévoir si l'arrêt se produisait. Or, Turing a montré qu'il n'existe, hélas, pas de machines *A* diagnostiquant en un temps fini pour toute machine *n* et pour toute donnée *s*, si une machine *n* lancée sur un ruban occupé par une suite *s* de symboles, s'arrêtera ou non. Son raisonnement est indiqué sur la figure 3 et il ressemble au paradoxe d'Épiménides le Crétois qui en disant *Je mens*, dit la vérité et réciproquement.

Ce résultat est très important : il établit que certaines tâches clairement définies, comme ici prévoir si une machine va



3. Le problème de l'arrêt. Turing démontre qu'il n'existe pas de machines prédisant, sans jamais se tromper et en un nombre fini d'étapes, si un calcul s'arrête. Voici son raisonnement qui utilise un argument analogue au paradoxe du menteur. On suppose qu'on détient une machine *A* qui, à chaque fois qu'on écrit sur son ruban des données *n* et *s*, indique au bout d'un nombre fini d'étapes si la machine de Turing numéro *n* s'arrête lorsqu'elle calcule en partant d'un ruban sur lequel la suite de symboles *s* a été inscrite. L'existence de cette machine *A* conduit à une contradiction. Connaissant la machine *A*, nous en construisons une autre, la machine *B*. Lorsque l'on inscrit *n* sur son ruban, elle s'arrête au bout d'un nombre fini d'étapes si la machine *n* avec la donnée *s* = *n* ne s'arrête pas et elle ne s'arrête pas si la machine numéro *n* soumise à la donnée *s* = *n* s'arrête (la machine *B* fait le même calcul que *A* soumise aux données *n* et *s*, mais au lieu d'indiquer « arrêt » ou « non-arrêt » part dans une boucle si *A* s'apprêtait à écrire « arrêt » et s'arrête si *A* s'apprêtait à écrire « non-arrêt »). Comme toute machine, *B* possède un numéro que nous nommons *m*. Soumise à la donnée *m*, la machine *B* se comporte de manière invraisemblable. Si elle s'arrête, c'est par définition de *B* que la machine *m* soumise à la donnée *m* ne s'arrête pas, ce qui est absurde, car *B* est elle-même la machine *m* et elle s'arrête. Si elle ne s'arrête pas, c'est par définition que la machine *m*, soumise à la donnée *m* s'arrête, ce qui est aussi absurde pour la même raison : la machine *m*, c'est la machine B. Aucune machine prédisant l'arrêt ne peut donc exister.

s'arrêter ou non, ne sont pas algorithmiquement réalisables. Depuis 1936, on a démontré que des milliers d'autres tâches ne sont pas algorithmiquement réalisables (on parle de problèmes indécidables) ; face à un problème complexe, l'informaticien s'interroge pour savoir s'il est décidable ou indécidable.

La thèse de Turing

La théorie classique du calcul repose sur l'idée que tout algorithme de calcul peut être réalisé par une machine de Turing. Selon la *thèse de Turing*, tout ce qui est algorithmiquement réalisable (notion intuitive) est faisable par une machine de Turing (notion mathématique). La thèse de Turing n'est pas démontrable, car on ne peut prouver de manière définitive que tout algorithme au sens intuitif sera programmable à l'aide d'une machine de Turing. En revanche, la thèse de Turing serait falsifiée si quelqu'un proposait une tâche que tout le monde s'accorde à considérer « algorithmique » et que pourtant aucune machine de Turing ne peut effectuer.

Une difficulté a été soulevée : puisque tout algorithme doit être réalisable mécaniquement, n'est-ce pas à la physique de dire si la thèse de Turing est juste ou fausse ? Pour éviter certaines confusions liées au rôle de la physique, il est souhaitable de distinguer la thèse de Turing *classique* – qui concerne la notion philosophique de tâche finiment faisable par algorithme fini – et la thèse de Turing *physique* – qui concerne la notion de tâche réalisable en temps fini par un système matériel.

La thèse de Turing classique est aujourd'hui inébranlable, car si on avait dû trouver des exemples d'algorithmes qui ne se programment pas à l'aide des machines de Turing, cela aurait été fait depuis longtemps. En revanche la thèse de Turing physique est discutée, car on ne sait pas tout ce qu'un système matériel du monde réel peut faire.

Remettre en cause la thèse de Turing physique consiste à proposer un mécanisme de calcul résolvant le problème de l'arrêt ou tout autre problème démontré algorithmiquement indécidable dans le cadre de la théorie classique du calcul. Trois méthodes ont été proposées pour franchir cette *barrière de Turing*.

(*a*) Les machines « accélérantes » envisageables en mécanique newtonienne et dont l'idée remonte à des travaux de Hermann Weyl des années 1940.

(*b*) Les machines à trous noirs suggérées par la relativité générale dans un article récent de Gabor Etesi et Istvan Németi.

(*c*) Les systèmes quantiques de calcul qui, selon les idées de Tien Kieu ou le modèle de Cristian Calude et Boris Pavlov, pourraient aussi franchir la barrière de Turing, c'est-à-dire résoudre des problèmes indécidables par machines de Turing.

Les machines accélérantes

Sur un plan logique, rien ne semble faire obstacle à l'idée d'une machine qui mettrait une demi-seconde pour effectuer une première instruction de sa liste, un quart de seconde pour la deuxième étape, un huitième pour la troisième étape, etc. Puisque $1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots = 1$, une infinité d'étapes de calculs seraient ainsi effectuées en un temps total d'une seconde seulement.

Voyons comment une telle machine résoudrait le problème de l'arrêt des machines de Turing classiques. La difficulté est de savoir au bout de mille étapes de fonctionnement si la machine *n* calculant à partir des données *s* va continuer, ou si, au contraire, elle va interrompre son calcul dans l'étape qui suit ? Une machine accélérante A_c va résoudre le problème. Pour résoudre le problème de l'arrêt de la machine *n* avec la donnée *s*, la machine A_c fonctionne comme la machine *n*, mais en accéléré, chaque instruction durant deux fois moins de temps que la précédente. La première case du ruban comporte un 0 et, en cas d'arrêt, A_c modifie la première case du ruban en remplaçant le 0 par un 1.

Deux cas sont possibles :
(a) La machine *n* pour la donnée *s* s'arrête et alors la machine accélérante A_c le découvre au bout d'un nombre fini d'étapes et change alors le 0 de la première case du ruban en 1. Après une seconde, un 1 sera inscrit sur cette première case. *(b)* Ou

bien, la machine n pour la donnée s ne s'arrête jamais, et alors la machine accélérante A_c ne va jamais rien écrire sur la première case de son ruban, et donc, au bout d'une seconde, cette case porte toujours le 0 qui était inscrit au départ. Dans tous les cas, c'est-à-dire quelles que soient la machine n et la donnée s, la machine accélérante A_c indique au bout d'une seconde par un 1 ou un 0 sur la première case de son ruban s'il y a arrêt ou non pour n et s. Cette machine prédit l'arrêt et résout donc le problème de l'arrêt des machines de Turing classiques, pourtant indécidable !

Grâce aux machines accélérantes et en utilisant le même genre de méthodes, toutes sortes de problèmes indécidables de la théorie du calcul deviennent décidables. On peut en particulier décider si une équation diophantienne (équation à coefficients entiers comme $7x^2 + 3y^9 = 13z^{11}$ dont on recherche des solutions entières) possède des solutions ou non. Yuri Matiiassevitch a montré en 1970 que ce problème – dénommé *Dixième problème de Hilbert* – était indécidable : aucune machine de Turing classique ne peut le résoudre. La machine accélérante surmonte cette impossibilité, calcule toutes les solutions envisageables (infinité dénombrable) et change le 0 en 1 de la première case du ruban si elle en trouve une satisfaisante. Après une seconde, si la première case porte un 0, c'est que l'équation qu'on lui a confiée n'a pas de solutions en nombres entiers, et si elle porte un 1, c'est que l'équation possède au moins une solution. Là encore, la barrière de l'indécidabilité est franchie par les machines accélérantes.

On peut aussi déterminer avec une telle machine si un système formel donné contient une contradiction : on sait que l'existence d'une seule contradiction dans une théorie implique que toutes les autres contradictions sont possibles (si 1 + 1 = 3, on peut en déduire que je suis le pape !). La machine accélérante mène de manière systématique la recherche de la démonstration d'une absurdité (par exemple 0 = 1) et change le 0 de la première case en 1 si elle trouve une telle démonstration. Au bout d'une seconde de calcul, ce qui est inscrit sur la première case du ruban de la machine accélérante indique sans erreur possible si le système formel étudié est contradictoire ou non. Il se trouve que le problème de la non-contradiction d'un système formel est non seulement algorithmiquement indécidable, mais qu'il est aussi logiquement indécidable : d'après K. Gödel, dès qu'un système formel est raisonnablement puissant, il ne peut pas démontrer de lui-même qu'il est non contradictoire. Grâce aux machines accélérantes, cette limitation serait surmontée.

Bien sûr personne aujourd'hui n'envisage sérieusement de construire une machine accélérante, car la mécanique classique n'est qu'une grossière approximation du monde physique. En particulier, elle cesse d'être valide aux échelles très petites d'espace et de temps pour lesquelles il faut faire appel à d'autres théories. La physique permet de concevoir des échelles de temps aussi petites que l'on veut et donc des machines accélérantes, mais ne cesse-t-elle pas alors de décrire le monde physique ?

Rêve relativiste

Peut-être pas ! La théorie de la relativité générale d'Einstein conduit à imaginer un repère où ce qui possède une durée finie correspond à une durée illimitée dans un autre repère : une piste relativiste sérieuse semble donc permettre de franchir ou de contourner la barrière de Turing.

C'est cette voie qu'ont récemment explorée Gabor Etesi de l'Institut de physique théorique de Yukawa à Kyoto, et Istvan Németi, de l'Institut de mathématiques de l'Académie hongroise des sciences de Budapest. Ils ont imaginé un voyageur se précipitant vers un trou noir et recevant des messages d'un dispositif de calcul gravitant autour de ce trou noir. Si le trou noir est en rotation et si le trajet parcouru par le voyageur suit une certaine trajectoire bien précise, le système de calcul en orbite autour du trou noir peut indéfiniment communiquer des informations correspondant à des instants qui dans le repère de celui qui plonge vers le trou noir seront au total, tous reçus en une durée finie. Le temps infini du système de calcul tournant autour du trou noir se concentre sur une durée finie pour celui qui plonge vers le trou noir.

Une sorte de machine accélérante semblerait donc possible dans le cadre relativiste. Pour décider de l'arrêt de la machine n soumise aux données s, le système de calcul en orbite explorerait toutes les étapes de calcul empruntées

4. La machine accélérante franchit la barrière de Turing. Avec les machines accélérantes, les opérations sur chaque case sont de plus en plus rapides à mesure que l'on avance dans les instructions. On pourrait par exemple mener la première instruction en 1/2 seconde, la deuxième en 1/4 de seconde, la troisième en 1/8 de seconde, etc. Le temps total fini pour mener le calcul infini serait de 1/2+1/4+1/8+...=1 seconde. De telles machines ne sont pas sérieusement envisagées aujourd'hui. Pourtant, si on réussissait à en disposer, toutes sortes de problèmes considérés aujourd'hui indécidables (impossibles à résoudre par une machine de Turing) seraient résolus.

Scientific American

5. Les domaines de validité, l'infini et la physique. Les trois connaissances scientifiques du monde sont représentées : la mécanique newtonienne par la métaphore de la pomme, le monde quantique par Galilée et son microscope, et les lois relativistes du cosmos par les premières explorations avec la lunette. Toutes les méthodes proposées permettant en théorie de résoudre des problèmes indécidables possèdent en commun un défaut qui rend très incertaine la possibilité d'en tirer de véritables machines du monde réel : elles supposent que les théories physiques utilisées sont vraies pour tous les ordres de grandeur. Dans le cas des machines accélérantes et de la relativité, c'est en supposant que le temps est indéfiniment fractionnable et que des intervalles de temps aussi petits soient-ils gardent un sens physique. Dans le cas de la mécanique quantique, c'est en supposant que les systèmes quantiques manipulés sont décrits par la mécanique quantique avec une précision illimitée. L'histoire de la physique nous apprend que nos théories ne sont vraies que dans des domaines recouvrant 20 ordres de grandeur au plus. Étendre les domaines de validité oblige en général à changer de théorie : passage de la physique classique à la physique relativiste, puis quantique. Si cette règle est générale, alors les propositions récentes faites pour franchir la barrière de Turing sont illusoires et toutes celles qu'on pourra faire dans l'avenir le seront aussi.

par la machine *n* soumise à *s* et enverrait un message au voyageur se précipitant en direction du trou noir lorsque le calcul ainsi lancé s'arrêterait. En l'absence de message, le voyageur conclura au bout d'un temps fini dans son propre repère que la machine de Turing testée ne s'arrête pas.

Si le trou noir est en rotation, l'analyse faite par les deux physiciens montre que tous les messages possibles envoyés par le système de calcul en orbite sont reçus par le voyageur plongeant vers le trou noir avant un certain instant limite, et que cet instant limite pour lui est suivi d'autres instants qu'il vivra donc avant sa rencontre avec la singularité créée par le trou noir.

Ce voyageur possède un futur… mais il ne sera peut-être pas très joyeux. En effet, il lui sera impossible d'échapper à l'attraction exercée par le trou noir. Avant d'être déchiqueté par les forces gravitationnelles extrêmes du trou noir au moins aura-t-il la satisfaction de savoir que la machine *n* avec la donnée *s* ne s'arrête jamais. S'il s'intéresse aux équations diophantiennes, il saura si celle de son choix possède des solutions ou non : le grand théorème de Fermat aurait pu être traité de cette façon. Si c'est la non-contradiction de la théorie des ensembles qui le tracasse, le voyageur pourra savoir qu'elle ne conduit à aucune contradiction, ce dont la majorité des mathématiciens classiques sont persuadés (bien que sachant à cause de Gödel que cela restera toujours incertain pour eux).

Notons aussi que plusieurs problèmes pourraient être soumis simultanément au calculateur en orbite pourvu que les messages envoyés vers le voyageur soient codés pour indiquer à quels problèmes ils correspondent. Une infinité de problèmes pourraient même être traités de cette façon par un système en orbite envoyant des messages au voyageur suicidaire du trou noir.

Les deux physiciens ont évalué que l'effet de décalage vers le bleu (l'inverse du décalage vers le rouge) engendré par la situation serait surmontable. De même leurs calculs établissent que l'énergie reçue du système en orbite par le voyageur sera finie et donc ne le détruira pas. L'orbite circulaire suivie par le système de calcul est suffisamment stable pour qu'aucune énergie ne soit nécessaire pour maintenir le système de calcul en rotation. Ils concluent avec optimisme que les objections les plus simples à la réalisation d'un tel système permettant de franchir la barrière de Turing sont surmontables.

Remarquons toutefois que même si un mathématicien curieux et décidé à sacrifier sa vie pour savoir si la théorie des ensembles est contradictoire (c'est une énigme lancinante qui peut susciter des actes héroïques !), il subsiste quelques objections inquiétantes. Le système en orbite doit disposer dans son repère d'un temps illimité. Est-ce vraiment envisageable si l'Univers est fini comme la cosmologie ne l'exclut pas ? Une autre objection vient encore à l'esprit : le temps dans le repère du voyageur doit être infiniment fractionnable, car les messages en provenance du système en orbite autour du trou noir peuvent arriver à des instants infiniment proches du point limite. Il faut donc que physiquement cela possède un sens. La mécanique quantique en fait douter. Il est donc à craindre que celui qui oserait se lancer vers le trou noir le fasse pour rien, car l'absence de message en provenance du système en orbite pourra tout aussi bien signifier le non-arrêt de la machine de Turing testée que l'échec de l'expérience dû à une objection passée inaperçue avant le départ.

Heureusement les doutes que la mécanique quantique suggère concernant l'hypercalcul relativiste sont compensés par d'autres idées pour franchir la barrière de Turing qu'elle propose à son tour.

Solutions quantiques ?

Presque simultanément Tien Kieu d'une part, Cristian Calude et Boris Pavlov d'autre part, ont décrit des mécanismes quantiques franchissant – en théorie –la barrière de Turing, c'est-à-dire résolvant en temps fini des problèmes demandant classiquement des calculs infinis.

La mécanique quantique a déjà produit une petite révolution en informatique théorique au milieu des années 1990 : plusieurs chercheurs ont mis en évidence des mécanismes de calcul quantique dont l'efficacité est supérieure à tout ce que l'on connaît classiquement. Peter Shor en particulier a conçu une série de manipulations quantiques – un algorithme quantique – qui, si on sait les réaliser, résoudraient plus rapidement le problème de la factorisation des entiers que n'importe quel mécanisme classique connu. Ces travaux montrent que ce qui est faisable en temps polynomial avec des ordinateurs exploitant la mécanique quantique ne l'est pas nécessairement avec des ordinateurs classiques.

Tout cela a étonné la communauté scientifique et a engendré un important courant de recherche dont les objectifs sont la mise au point d'ordinateurs quantiques. Toutefois ces travaux ne remettaient pas en cause la barrière de Turing. Il était au contraire admis qu'un ordinateur quantique, tel que David Deutch l'a modélisé sous la forme des *machines de Turing quantiques*, calcule plus rapidement que son homologue classique, mais ne franchit pas la barrière de l'indécidabilité de Turing. Même le grand physicien Richard Feynman, qui pensa le premier au pouvoir de calcul de la mécanique quantique, était persuadé qu'elle ne remettait pas en cause la thèse de Turing physique.

Un nouveau pas a maintenant été franchi et les travaux de Kieu, Calude et Pavlov suggèrent une révision de la thèse de Church physique par la mécanique quantique.

Le mécanisme de calcul quantique proposé par Kieu s'attaque au problème des équations diophantiennes. Une codification de l'équation dont on veut savoir si elle possède des solutions est effectuée en un nombre fini d'étapes dans un système ayant une infinité de niveaux d'énergie (tous les atomes en ont une infinité). Une mesure praticable en un nombre fini d'étapes est menée sur ce système et extrait une information sur l'équation codée, indiquant qu'elle possède des solutions ou qu'elle n'en possède pas. L'indécidabilité du dixième problème de Hilbert serait donc surmontée par un processus fini de calcul quantique.

Les travaux de Calude et Pavlov concernent directement le problème de l'arrêt des machines de Turing classiques. Là encore, un procédé fini de préparation permet de mener un calcul qui indique (avec une probabilité d'erreur connue et contrôlable) si une machine de Turing donnée s'arrête.

Une question de philosophie des sciences ?

Aucune mise en œuvre concrète de ces idées n'est envisageable pour l'instant, mais, plus grave sans doute, des objections sérieuses persistent sur l'idée même du franchissement de la barrière de Turing.

En particulier, l'objection déjà soulevée par le mathématicien Leonid Levin concernant l'algorithme quantique de Peter Shor pour la factorisation des entiers. Pour de grands nombres, de tels mécanismes ne peuvent fonctionner que si la mécanique quantique est valide bien au-delà des domaines où elle a été testée. Levin remarque que nos théories physiques ne sont valides que sur quelques ordres de grandeur, 10 ou 20 au maximum, et que l'algorithme de Shor se fonde sur l'hypothèse que l'on peut faire confiance à la mécanique quantique sur des dizaines, voire des millions d'ordres de grandeur (selon la taille des nombres à factoriser). Pour les algorithmes de Kieu, Calude et Pavlov permettant de franchir la barrière de Turing, la confiance à accorder à la mécanique quantique doit être infinie !

Les remises en cause par la relativité et la mécanique quantique de la thèse de Turing physique lancent des défis à la théorie du calcul. Il apparaît cependant que la validité de la thèse de Turing physique (que la mécanique newtonienne prise à la lettre permettait déjà de mettre en doute) repose plus sur la conception qu'on a du rôle de l'infini mathématique en physique, que sur d'hypothétiques mécanismes de calcul élaborés dans l'abstrait en prenant les formalismes théoriques pour argent comptant et sans s'occuper des domaines de validité spécifique des théories.

Notre idée de ce qu'est une théorie physique valide et des limites de confiance qu'on doit lui accorder sont au cœur du débat qui finalement est au moins autant philosophique que scientifique. Si on pense – ce qui est raisonnable – qu'une théorie physique ne peut jamais être valide pour tout ordre de grandeur, alors c'est par principe qu'aucune remise en cause de la thèse de Turing physique n'aura jamais lieu. Ne doutons pas que le débat qui va se poursuivre sur ces questions sera profond, riche et passionnant.

Auteur & Bibliographie

Jean-Paul DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille.

R. Feynman, *Lecture on Computation* (édition établie par A. Hey et R. Allen), Penguin Books, Londres, 1996.

C. Calude et B. Pavlov, *Coins, Quantum Measurements and Turing's Barrier, Quantum Information Processing, 1, 1-2, 107-127, 2002.*

C. Calude, J. Casti et M. Dinneen, *Unconventional Models of Computation*, Springer-Verlag, Singapore, 1998.

G. Etesi et I Németi, *Non-Turing Computations via Malament-Hogarth Space-times, International Journal of Theoretical Physics*, 41, 341-370, 2002.

T. Kieu, *Computing the Non-computable*, in *Contemporary Physics*, 44, 2003.

T. Ord, *Hypercomputation : Computing More Than the Turing Machine*, University of Melbourne, http://arxiv.org/abs/math.LO/0209332.