Quelques formules utiles

Équations de partitions

Si $T(n) = aT(\lfloor \frac{n}{b} \rfloor) + \mathcal{O}(n^d)$, avec $a > 0$, $b > 1$ et $d \geq 0$ alors :

- si $d > \log_b a$, $T(n) = \mathcal{O}(n^d)$
- si $d = \log_b a$, $T(n) = \mathcal{O}(n^d \log n)$
- si $d < \log_b a$, $T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a})$

Équations linéaires d'ordre k

Il s'agit des équations de la forme $T(n) = a_{n-1}T(n-1) + a_{n-2}T(n-2) + \ldots + a_{n-k}T(n-k) + f(n)$. Pour déterminer une solution d'une telle équation il faut connaître les valeurs de k termes successifs initiaux.

Si $f(n) = 0$ il s'agit d'une équation **sans second membre** et on peut la résoudre grâce à son polynôme caractéristique :

$$P(x) = x^k - a_{n-1}x^{k-1} - a_{n-2}x^{k-2} - \ldots - a_{n-k}$$

La solution d'une équation linéaire sans second membre est de la forme :

$$T(n) = Q_1(n)r_1^n + Q_2(n)r_2^n + \ldots + Q_s(n)r_s^n$$

- r_i : racine du polynôme caractéristique
- w_i : ordre de multiplicité de la racine r_i
- Q_i : polynôme de degré $w_i - 1$

Logarithmes et Puissances

$$\log_b(a) = \frac{ln(a)}{ln(b)} = \frac{\log_u(a)}{\log_u(b)} \qquad \log_u(a) + \log_u(b) = \log_u(a \times b) \qquad \log_u(a) - \log_u(b) = \log_u(\frac{a}{b})$$

$$x^a = e^{a \times ln(x)} = u^{a \times log_u(x)} \qquad x^{a+b} = x^a \times x^b \qquad x^{a-b} = \frac{x^a}{x^b} \qquad x^{a \times b} = (x^a)^b = (x^b)^a$$

$$\log_u(a^x) = x \times \log_u(a) \qquad \log_b(b^x) = b^{\log_b(x)} = x \qquad log_b(a) = \frac{1}{\log_a(b)} \qquad a^{\log_u(x)} = x^{\log_u(a)}$$

Sommes

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1)n}{2} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{(n+1)n}{2}\right)^2$$

pour $q \neq 1$:

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \qquad \sum_{i=1}^{n} i\ q^i = n\frac{q^{n+1}}{q-1} - q\frac{q^n - 1}{(q-1)^2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 q^i = n^2\frac{q^{n+1}}{q-1} - 2n\frac{q^{n+1}}{(q-1)^2} + q(q+1)\frac{q^n - 1}{(q-1)^3}$$

pour $f(x)$ continue et croissante sur $[a..b]$:

$$\sum_{i=a}^{b-1} f(i) \leq \int_a^b f(t)\ dt \leq \sum_{i=a+1}^{b} f(i)$$

pour $f(x)$ continue et croissante sur $[u-1..v+1]$:

$$\int_{u-1}^{v} f(t)\ dt \leq \sum_{i=u}^{v} f(i) \leq \int_u^{v+1} f(t)\ dt$$

pour $t \geq 0$, $\forall n \geq 0$:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{t^i}{i!} \lessapprox e^t$$

pour $k \geq 0$, $\forall n \geq 0$:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{i^k}{i!} \lessapprox e \times B_k$$

avec B_k = Nombre de Bell
$(B_0 = 1, B_1 = 1, B_2 = 2, B_3 = 5, B_4 = 15 \ldots)$