Calcul du groupe de monodromie d'une courbe algébrique plane

Poteaux Adrien

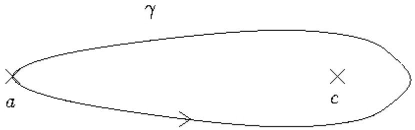
XLIM
Université de Limoges FRANCE

JNCF 2007

Problématique (1/3)

- $F \in \mathcal{K}[X, Y]$ unitaire où $\mathcal{K}$ sous-corps de $\mathbb{C}$.
- $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid F(x, y) = 0\}$.
- On appelle **fibre** en x_0 les racines de $F(x_0, Y)$=0.
- x_0 est **régulier** si $F(x_0, Y)$ est sans facteur multiple.
- x_0 sera dit **critique** s'il est non régulier.
- On note $c_1, \ldots, c_p$ les points critiques.
- On note $\delta(x_0)$ la distance entre x_0 et son plus proche point critique.

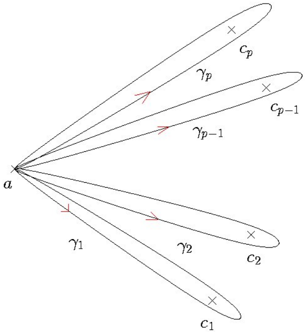
Problématique (2/3)



- γ un lacet de a qui contourne uniquement le point critique c.
- $\mathcal{F}(a) = \{y_1, y_2, \ldots, y_d\}$ la fibre de a.
- Théorème des fonctions implicites : $\exists (Y_i)_{1 \leq i \leq d}$ holomorphes t.q. $F(x, Y_i(x)) = 0$ et $Y_i(\gamma(0)) = Y_i(a) = y_i$.
- On prolonge analytiquement les Y_i le long de γ.
- On a $\lim\limits_{t \to 1} Y_i(\gamma(t)) = y_{\sigma(i)} \, \forall 1 \leq i \leq d$ où σ est une permutation de $\{1, \ldots, d\}$.

Problématique (3/3)

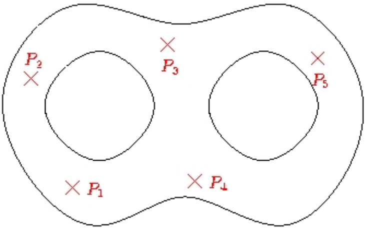
- On cherche les p permutations $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ correspondant aux points critiques $c_1, \ldots, c_p$.



- Ces permutations engendrent le groupe de monodromie.

Motivations : diviseurs (1/3)

$\mathcal{C}$ est une surface de Riemann homéomorphe à une sphère à g poignées où g est le genre de la courbe.



- diviseur $D = \sum n_{\mathcal{P}} \mathcal{P}$: somme formelle de points.
- degré d'un diviseur : $deg(D) = \sum n_{\mathcal{P}}$
- Diviseur de fonction $(f) = \sum v_{\mathcal{P}}(f)\mathcal{P}$: défini par les pôles et les zéros de f.

Motivations : diviseurs (2/3)

On note
- $\mathcal{F}$ l'ensemble des diviseurs de fonctions.
- $\mathcal{D}_0$ l'ensemble des diviseurs de degré 0.

On a $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}_0$ mais pas égalité.

Problèmes :

- Soit $D \in \mathcal{D}_0$. Comment déterminer si $D \in \mathcal{F}$?
- Existe-t-il $n \in \mathbb{Z}$ tel que $nD \in \mathcal{F}$?
- Etant donnés $D_1, \ldots, D_p \in \mathcal{D}_0$, existe-t-il $n_1, \ldots, n_p \in \mathbb{Z}$ tels que $n_1 D_1 + \cdots + n_p D_p \in \mathcal{F}$?

Motivations : diviseurs (3/3)

- **Méthode algébrique** : réduction modulo p de la courbe et des diviseurs pour obtenir un candidat.
  Problème : cas des diviseurs infinis (long).
- **Méthode analytique** : Théorème d'Abel Jacobi effectif.
  L'application d'Abel

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{A}: & \mathcal{D}_0/\mathcal{F} & \longrightarrow & \mathbb{C}^g/\Gamma \\ & \sum n_{\mathcal{P}}\mathcal{P} & \longmapsto & \sum n_{\mathcal{P}} \left(\int_{\mathcal{O}}^{\mathcal{P}} \omega_1, \cdots, \int_{\mathcal{O}}^{\mathcal{P}} \omega_g \right) \end{array}$$

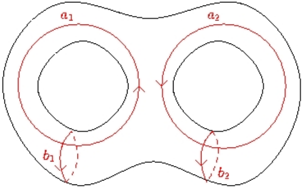
  est un isomorphisme de groupe.

$\Rightarrow$ Calculer l'application d'Abel donne les informations souhaitées sur les diviseurs !

Motivations : l'application d'Abel

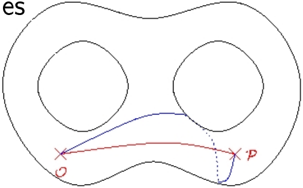
$$\begin{array}{rccc} \mathcal{A}: & \mathcal{D}_0/\mathcal{F} & \longrightarrow & \mathbb{C}^g/\Gamma \\ & \sum n_{\mathcal{P}}\mathcal{P} & \longmapsto & \sum n_{\mathcal{P}}\left(\int_{\mathcal{O}}^{\mathcal{P}}\omega_1, \cdots, \int_{\mathcal{O}}^{\mathcal{P}}\omega_g\right) \end{array}$$

- Il y a $2g$ cycles qui ne peuvent être contractés à un point.
  $\Rightarrow$ base de l'homologie.



- Périodes : intégrales des différentielles sans pôles sur cette base.

- Modulo les périodes, $\int_{\mathcal{O}}^{\mathcal{P}}\omega_i$ ne dépend pas du chemin choisi.



Motivations : applications

- Primitive de fonctions algébriques (partie logarithmique de l'intégrale).
  Risch (1969), Davenport (1981), Trager (1984), Bronstein (1990), Bertrand (1995)...

- Etude symbolique d'EDO : existence et calcul des solutions algébriques, calcul du groupe de Galois différentiel.

- Calcul des solutions quasi-périodiques des équations KP (Kadomtsev-Petviashvili).
  B. Deconinck et H. Segur (1998)

- Solutions solitons des équations KdV (Korteweg-de Vries) et NLS (Nonlinear Schrödinger).

Motivations : calcul des périodes

M. van Hoeij, B. Deconinck (1996) :

- Calcul de la monodromie.
- Calcul d'une base de l'homologie à l'aide d'une représentation de la monodromie (Tretkoff & Tretkoff, 1984).
- Calcul d'une base de l'espace des différentielles sans pôles (les ω_i).
- Calcul des périodes (intégrales des ω_i le long des cycles de l'homologie).

Monodromie : état de l'art (sketch)

- Utilisation de l'équation différentielle.
  Chudnovsky & Chudnovsky (1985), Van der Hoeven (2000) ...

- Relier les fibres :
  - Van Hoeij & Deconinck (1999) : fonction monodromy de Maple. Fibres reliées à l'aide des dérivées premières. Fiabilité ?
  - Van Hoeij & Rybowicz (com. perso.) : théorème de Smith + arithmétique numérique/intervalles.

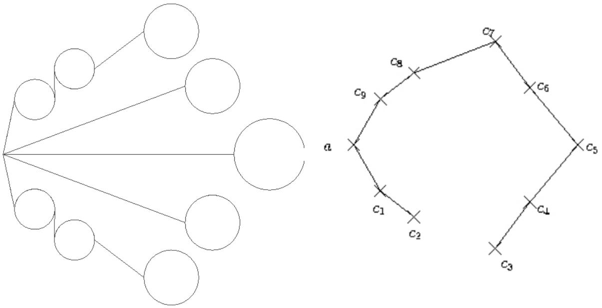
Approche proposée

- Optimiser les chemins parcourus.
- Connexions contrôlées.
- Utilisation de développements de Puiseux.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \, \zeta_e^k \, (x-c)^{\frac{k}{e}}$$

- Développement en des points critiques (calculs numériques et modulaires).
- Prototype d'implémentation en Maple.

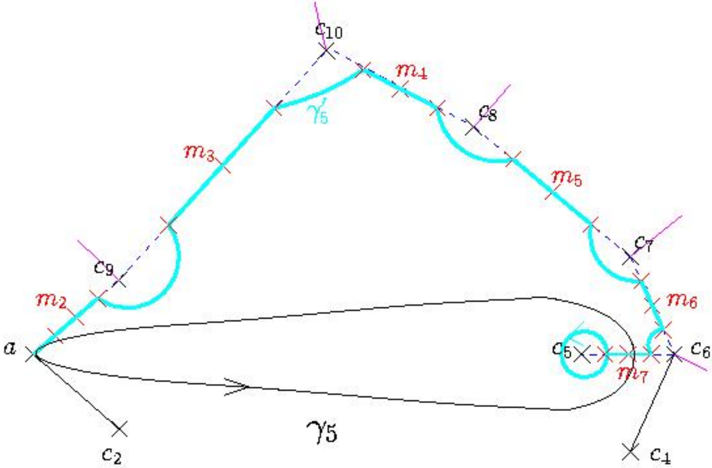
Optimiser les chemins parcourus



- Idée : on utilise un arbre de recouvrement minimum pour la distance pour minimiser les chemins parcourus.
- On cherche ensuite des lacets, suivant cet arbre, homotopes aux lacets γ_i que l'on souhaite suivre.

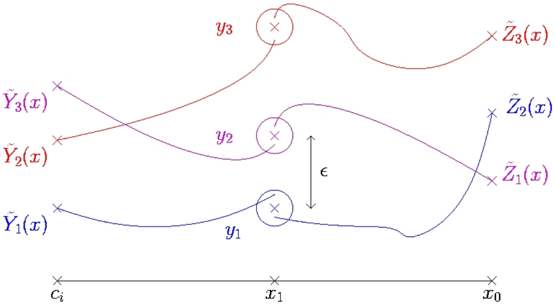
Construction des chemins

Un exemple : $F(x,y) = (x-1)\,y^3 - 2\,x^3\,y^2 + x\,y + 1$.



Contrôle de la connexion

On note $Y(x)$ les séries de Puiseux et $\tilde{Y}(x)$ les séries tronquées.



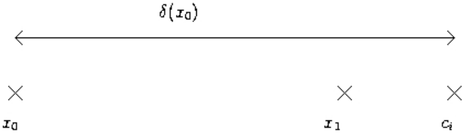
connexion fiable si :

$$\left| Y(x_1) - \tilde{Y}(x_1) \right| < \frac{\epsilon}{4}$$

pour chaque série $Y(x) \in \{Y_1(x), Z_1(x), \ldots, Y_d(x), Z_d(x)\}$.

Contrôle de la connexion : ordre de troncation ?

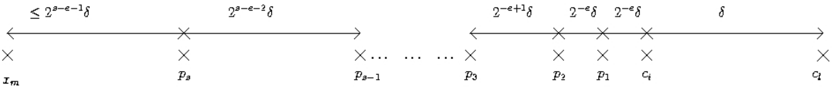
- Cauchy $\Rightarrow$ donne un ordre de troncation n pour la série afin d'avoir la précision souhaitée.



- On a $n \geq \dfrac{\ln\left(\frac{\epsilon}{4M}\right) + \ln(1-\beta)}{\ln(\beta)}$ avec $\beta = \left(\dfrac{\delta(x_0)}{|x_1 - x_0|}\right)^{\frac{1}{e}}$.

Gestion du nombre de pas

- Si $\beta = \frac{1}{2}$, il suffit d'avoir $n \geq 3 - \log_2\left(\frac{\epsilon}{M}\right)$.
- $\beta = \frac{1}{2}$ si $|x_1 - x_0| = 2^{-e}\,\delta(x_0)$.



- Cela prend $\left\lceil \log_2\left(\frac{\delta(x_m)}{\delta(c_i)}\right)\right\rceil + e + 1$ étapes.

Utilisation de développements au-dessus des points critiques

- Développement de Puiseux : $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \, \zeta_e^k \, (x_0 - c)^{\frac{k}{e}}$

Intérêt :

- ▶ Faire un tour autour d'un point critique est gratuit.
- ▶ Contrôle numérique lors de l'intégration ultérieure.

- Newton : utilise des changements de variable successifs :

$$F(X, Y) \leftarrow \frac{F(\xi^u X^q, \xi^v X^m (1+Y))}{X^l}$$

où u, v, q, m et l viennent d'une arête Δ du polygone de Newton et ξ est une racine du polynôme caractérisitique de Δ .

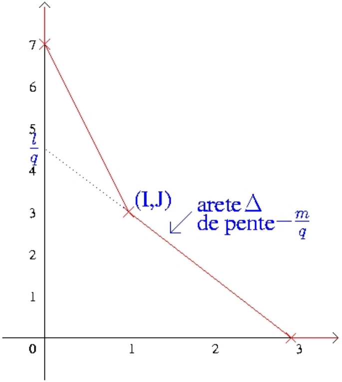
Polygone de Newton

$$F(X,Y) \leftarrow \frac{F(\xi^u X^q, \xi^v X^m(1+Y))}{X^l}$$

- polynôme caractéristique :

$$\phi(T) = \sum_{(i,j)\in\Delta} a_{ij} T^{\frac{i-l}{q}}.$$

- ξ racine de ϕ.
- u, v tels que $uq - vm = 1$.



Calcul des développements de Puiseux

- Calcul numérique délicat.
- Calcul symbolique : deux principaux problèmes.
  - Croissance des coefficients (augmentation des temps de calcul et problème d'évaluation).
  - Calcul dans des extensions de degré potentiellement élevé.

Exemple : $F = (y^3 - x)\,((y-1)^2 - x)\,(y - 2 - x^2) + x^2\,y^5$ a pour discriminant $x^3\,P(x)$ avec $deg_x(P) = 23$.

Les coefficients de son développement de Puiseux à l'ordre 1 ont une taille de 136 chiffres !

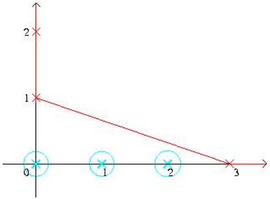
Approche numérique/modulaire

Algorithme de Puiseux :

- Informations qui doivent être exactes :
  - Les polygones de Newton.
  - Les multiplicités des racines des polynômes caractéristiques.
- Informations que l'on peut traiter numériquement :
  - Les coefficients des développements calculés.

$\Rightarrow$ Idée :

On fait les calculs numériquement.
On obtient les informations exactes
à l'aide d'un calcul modulaire parallèle.



Précision obtenue

Digits 10

F	symb.	num. / mod.
$y^4 - 200y^2 + 40y - 2 - x$	7	9
$(y^3 - x)((y-1)^2 - x)(y - 2 - x^2) + x^2y^5$	2	8
$y^2 + 11/52 - 16/13x + 3x^2 - 4x^3 + 3x^4 - x^5$	7	7

$$F = y^3 - x^5 + 2\,(10x - 1)^2$$

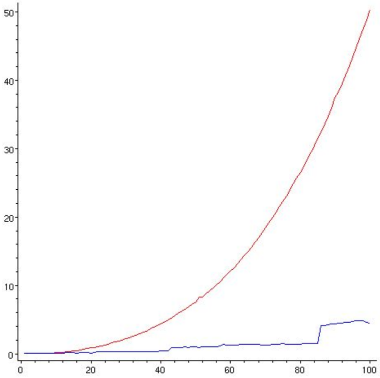
Digits	symb.	num. / mod.	Digits	symb.	num. / mod.
10	0	7	60	0	57
20	0	16	70	0	67
30	0	26	80	9	76
40	0	36	90	19	85
50	0	47	100	28	96

Algorithme monodromy : un exemple

$F = y^3 - x^5 + 2(10x - 1)^2$

- fonction de Maple : 0.802 secondes. Digits 10.
- version symbolique/numérique : 0.950 secondes. Précision de 40 chiffres nécessaires pour avoir un résultat correct.
- version numérique/modulaire : 0.839 secondes. Digits 10.

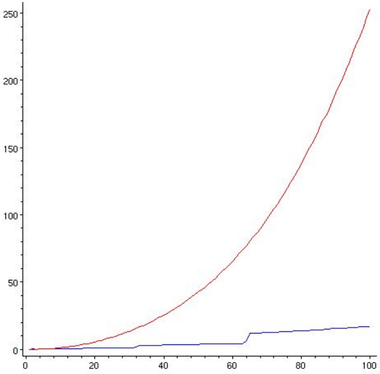
Temps de calcul(1/2)



$$F(x,y) = y^3 - x^5 + 2(10x-1)^2$$

au-dessus des racines de $P(x) = x^5 - 200x^2 + 40x - 2$

Temps de calcul(2/2)



$$F(x, y) = y^4 - 200y^2 + 40y - 2 - x$$

au-dessus des racines de $-9992 + 99900012x + 20006x^2 + x^3$

Perspectives

- Finaliser l'algorithme :
  - Choix du premier p (conjecture : prendre p qui ne modifie pas le genre de la courbe).
  - Mieux contrôler la précision nécessaire pour le calcul des coefficients.
  - Optimisations diverses...
- Théorème d'Abel Jacobi effectif.