

Calcul du groupe de monodromie d'une courbe algébrique plane

Poteaux Adrien

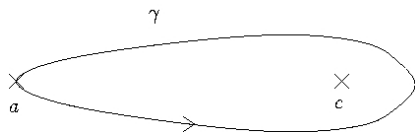
XLIM
Université de Limoges FRANCE

JNCF 2007

Problématique (1/3)

- ▶ $F \in \mathcal{K}[X, Y]$ unitaire où \mathcal{K} sous-corps de \mathbb{C} .
- ▶ $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid F(x, y) = 0\}$.
- ▶ On appelle **fibre** en x_0 les racines de $F(x_0, Y)=0$.
- ▶ x_0 est **régulier** si $F(x_0, Y)$ est sans facteur multiple.
- ▶ x_0 sera dit **critique** s'il est non régulier.
- ▶ On note c_1, \dots, c_p les points critiques.
- ▶ On note $\delta(x_0)$ la distance entre x_0 et son plus proche point critique.

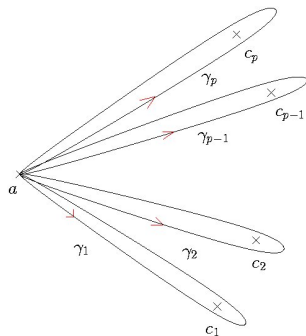
Problématique (2/3)



- ▶ γ un lacet de a qui contourne uniquement le point critique c .
- ▶ $\mathcal{F}(a) = \{y_1, y_2, \dots, y_d\}$ la fibre de a .
- ▶ Théorème des fonctions implicites : $\exists (Y_i)_{1 \leq i \leq d}$ holomorphes t.q. $F(x, Y_i(x)) = 0$ et $Y_i(\gamma(0)) = Y_i(a) = y_i$.
- ▶ On prolonge analytiquement les Y_i le long de γ .
- ▶ On a $\lim_{t \rightarrow 1} Y_i(\gamma(t)) = y_{\sigma(i)} \forall 1 \leq i \leq d$
où σ est une permutation de $\{1, \dots, d\}$.

Problématique (3/3)

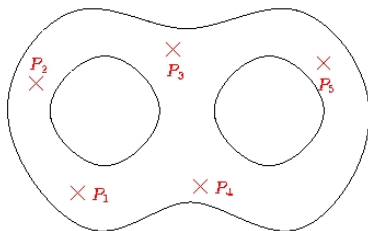
- ▶ On cherche les p permutations $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ correspondant aux points critiques c_1, \dots, c_p .



- ▶ Ces permutations engendrent le groupe de monodromie.

Motivations : diviseurs (1/3)

\mathcal{C} est une surface de Riemann homéomorphe à une sphère à g poignées où g est le genre de la courbe.



- ▶ diviseur $D = \sum n_{\mathcal{P}} \mathcal{P}$: somme formelle de points.
- ▶ degré d'un diviseur : $\deg(D) = \sum n_{\mathcal{P}}$
- ▶ Diviseur de fonction $(f) = \sum v_{\mathcal{P}}(f) \mathcal{P}$: défini par les pôles et les zéros de f .

Motivations : diviseurs (2/3)

- On note
- \mathcal{F} l'ensemble des diviseurs de fonctions.
 - \mathcal{D}_0 l'ensemble des diviseurs de degré 0.

On a $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}_0$ mais pas égalité.

Problèmes :

- ▶ Soit $D \in \mathcal{D}_0$. Comment déterminer si $D \in \mathcal{F}$?
- ▶ Existe-t-il $n \in \mathbb{Z}$ tel que $nD \in \mathcal{F}$?
- ▶ Etant donnés $D_1, \dots, D_p \in \mathcal{D}_0$, existe-t-il $n_1, \dots, n_p \in \mathbb{Z}$ tels que $n_1 D_1 + \dots + n_p D_p \in \mathcal{F}$?

Motivations : diviseurs (3/3)

- ▶ **Méthode algébrique** : réduction modulo p de la courbe et des diviseurs pour obtenir un candidat.
Problème : cas des diviseurs infinis (long).
- ▶ **Méthode analytique** : Théorème d'Abel Jacobi effectif.
L'application d'Abel

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : \quad \mathcal{D}_0/\mathcal{F} &\longrightarrow \mathbb{C}^g/\Gamma \\ \sum n_{\mathcal{P}}\mathcal{P} &\longmapsto \sum n_{\mathcal{P}} \left(\int_{\mathcal{O}}^{\mathcal{P}} \omega_1, \dots, \int_{\mathcal{O}}^{\mathcal{P}} \omega_g \right) \end{aligned}$$

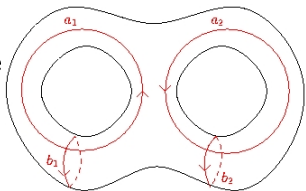
est un isomorphisme de groupe.

⇒ Calculer l'application d'Abel donne les informations souhaitées sur les diviseurs !

Motivations : l'application d'Abel

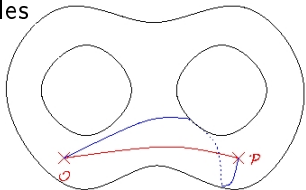
$$\begin{aligned} \mathcal{A}: \quad \mathcal{D}_0/\mathcal{F} &\longrightarrow \mathbb{C}^g/\Gamma \\ \sum n_P \mathcal{P} &\longmapsto \sum n_P \left(\int_{\mathcal{O}}^{\mathcal{P}} \omega_1, \dots, \int_{\mathcal{O}}^{\mathcal{P}} \omega_g \right) \end{aligned}$$

- ▶ Il y a $2g$ cycles qui ne peuvent être contractés à un point.
⇒ base de l'homologie.



- ▶ Périodes : intégrales des différentielles sans pôles sur cette base.

- ▶ Modulo les périodes, $\int_{\mathcal{O}}^{\mathcal{P}} \omega_i$ ne dépend pas du chemin choisi.



Motivations : applications

- ▶ Primitive de fonctions algébriques (partie logarithmique de l'intégrale).
Risch (1969), Davenport (1981), Trager (1984), Bronstein (1990), Bertrand (1995)...
- ▶ Etude symbolique d'EDO : existence et calcul des solutions algébriques, calcul du groupe de Galois différentiel.
- ▶ Calcul des solutions quasi-périodiques des équations KP (Kadomtsev-Petviashvili).
B. Deconinck et H. Segur (1998)
- ▶ Solutions solitons des équations KdV (Korteweg-de Vries) et NLS (Nonlinear Schrödinger).

Motivations : calcul des périodes

M. van Hoeij, B. Deconinck (1996) :

- ▶ Calcul de la monodromie.
- ▶ Calcul d'une base de l'homologie à l'aide d'une représentation de la monodromie (Tretkoff & Tretkoff, 1984).
- ▶ Calcul d'une base de l'espace des différentielles sans pôles (les ω_i).
- ▶ Calcul des périodes (intégrales des ω_i le long des cycles de l'homologie).

Monodromie : état de l'art (sketch)

- ▶ Utilisation de l'équation différentielle.
Chudnovsky & Chudnovsky (1985), Van der Hoeven (2000) ...
- ▶ Relier les fibres :
 - ▶ Van Hoeij & Deconinck (1999) : fonction monodromy de Maple. Fibres reliées à l'aide des dérivées premières. Fiabilité ?
 - ▶ Van Hoeij & Rybowicz (com. perso.) : théorème de Smith + arithmétique numérique/intervalles.

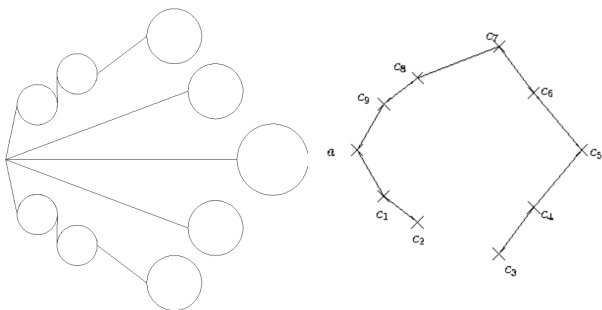
Approche proposée

- ▶ Optimiser les chemins parcourus.
- ▶ Connexions contrôlées.
- ▶ Utilisation de développements de Puiseux.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \zeta_e^k (x - c)^{\frac{k}{e}}$$

- ▶ Développement en des points critiques (calculs numériques et modulaires).
- ▶ Prototype d'implémentation en Maple.

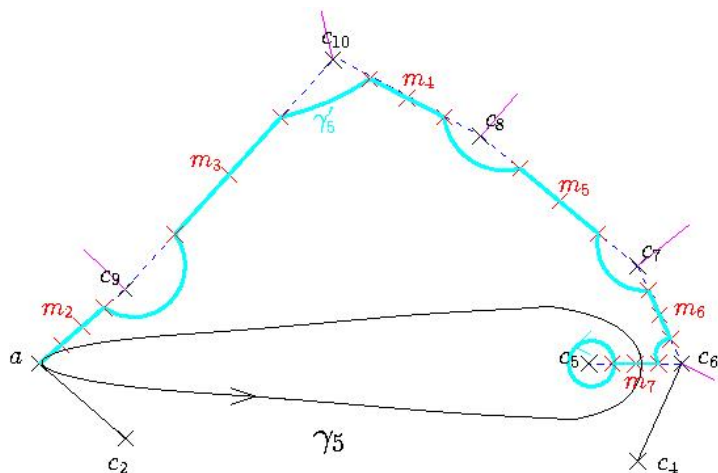
Optimiser les chemins parcourus



- ▶ Idée : on utilise un arbre de recouvrement minimum pour la distance pour minimiser les chemins parcourus.
- ▶ On cherche ensuite des lacets, suivant cet arbre, homotopes aux lacets γ_i que l'on souhaite suivre.

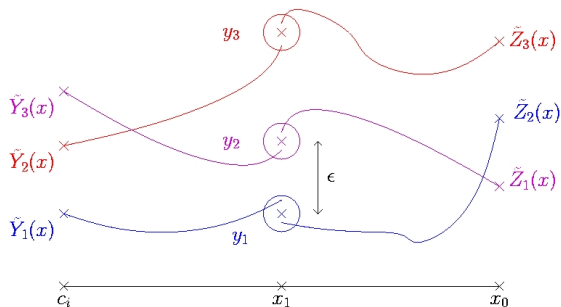
Construction des chemins

Un exemple : $F(x, y) = (x - 1)y^3 - 2x^3y^2 + xy + 1$.



Contrôle de la connexion

On note $Y(x)$ les séries de Puiseux et $\tilde{Y}(x)$ les séries tronquées.



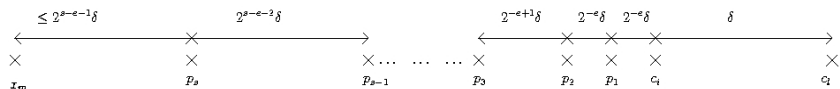
connexion fiable si :

$$\left| Y(x_1) - \tilde{Y}(x_1) \right| < \frac{\epsilon}{4}$$

pour chaque série $Y(x) \in \{Y_1(x), Z_1(x), \dots, Y_d(x), Z_d(x)\}$.

Gestion du nombre de pas

- ▶ Si $\beta = \frac{1}{2}$, il suffit d'avoir $n \geq 3 - \log_2 \left(\frac{\epsilon}{M} \right)$.
- ▶ $\beta = \frac{1}{2}$ si $|x_1 - x_0| = 2^{-e} \delta(x_0)$.



- ▶ Cela prend $\left\lceil \log_2 \left(\frac{\delta(x_m)}{\delta(c_i)} \right) \right\rceil + e + 1$ étapes.

Utilisation de développements au-dessus des points critiques

- Développement de Puiseux : $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \zeta_e^k (x_0 - c)^{\frac{k}{e}}$

Intérêt :

- ▶ Faire un tour autour d'un point critique est gratuit.
 - ▶ Contrôle numérique lors de l'intégration ultérieure.
- Newton : utilise des changements de variable successifs :

$$F(X, Y) \leftarrow \frac{F(\xi^u X^q, \xi^v X^m(1 + Y))}{X^l}$$

où u, v, q, m et l viennent d'une arête Δ du polygone de Newton et ξ est une racine du polynôme caractéristique de Δ .

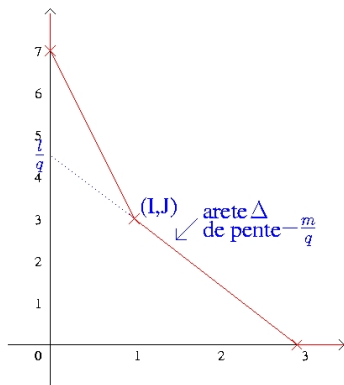
Polygone de Newton

$$F(X, Y) \leftarrow \frac{F(\xi^u X^q, \xi^v X^m(1+Y))}{X^l}$$

- ▶ polynôme caractéristique :

$$\phi(T) = \sum_{(i,j) \in \Delta} a_{ij} T^{\frac{i-j}{q}}.$$

- ▶ ξ racine de ϕ .
- ▶ u, v tels que $uq - vm = 1$.



Calcul des développements de Puiseux

- ▶ Calcul numérique délicat.
- ▶ Calcul symbolique : deux principaux problèmes.
 - ▶ Croissance des coefficients (augmentation des temps de calcul et problème d'évaluation).
 - ▶ Calcul dans des extensions de degré potentiellement élevé.

Exemple : $F = (y^3 - x)((y - 1)^2 - x)(y - 2 - x^2) + x^2 y^5$ a pour discriminant $x^3 P(x)$ avec $\deg_x(P) = 23$.

Les coefficients de son développement de Puiseux à l'ordre 1 ont une taille de 136 chiffres !

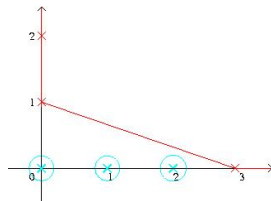
Approche numérique/modulaire

Algorithme de Puiseux :

- ▶ Informations qui doivent être exactes :
 - ▶ Les polygones de Newton.
 - ▶ Les multiplicités des racines des polynômes caractéristiques.
- ▶ Informations que l'on peut traiter numériquement :
 - ▶ Les coefficients des développements calculés.

⇒ Idée :

On fait les calculs numériquement.
On obtient les informations exactes
à l'aide d'un calcul modulaire parallèle.



Précision obtenue

Digits 10

F	symp.	num. / mod.
$y^4 - 200y^2 + 40y - 2 - x$	7	9
$(y^3 - x)((y - 1)^2 - x)(y - 2 - x^2) + x^2y^5$	2	8
$y^2 + 11/52 - 16/13x + 3x^2 - 4x^3 + 3x^4 - x^5$	7	7

$$F = y^3 - x^5 + 2(10x - 1)^2$$

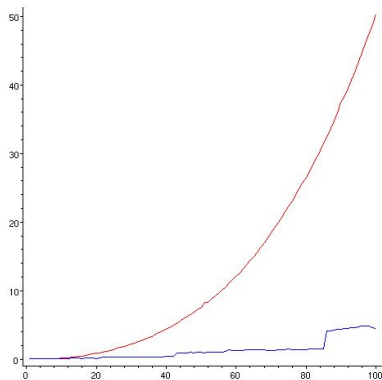
Digits	symp.	num. / mod.	Digits	symp.	num. / mod.
10	0	7	60	0	57
20	0	16	70	0	67
30	0	26	80	9	76
40	0	36	90	19	85
50	0	47	100	28	96

Algorithme monodromy : un exemple

$$F = y^3 - x^5 + 2(10x - 1)^2$$

- ▶ fonction de Maple : 0.802 secondes. Digits 10.
- ▶ version symbolique/numérique : 0.950 secondes. Précision de 40 chiffres nécessaires pour avoir un résultat correct.
- ▶ version numérique/modulaire : 0.839 secondes. Digits 10.

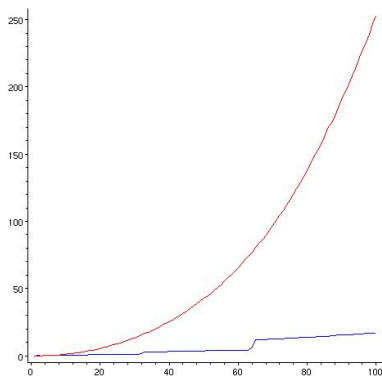
Temps de calcul(1/2)



$$F(x, y) = y^3 - x^5 + 2(10x - 1)^2$$

au-dessus des racines de $P(x) = x^5 - 200x^2 + 40x - 2$

Temps de calcul(2/2)



$$F(x, y) = y^4 - 200y^2 + 40y - 2 - x$$

au-dessus des racines de $-9992 + 99900012x + 20006x^2 + x^3$

- ▶ Finaliser l'algorithme :
 - ▶ Choix du premier p (conjecture : prendre p qui ne modifie pas le genre de la courbe).
 - ▶ Mieux contrôler la précision nécessaire pour le calcul des coefficients.
 - ▶ Optimisations diverses...

- ▶ Théorème d'Abel Jacobi effectif.